

Janina Ostrowska - Maciejewska

**PODSTAWY I ZASTOSOWANIA RACHUNKU
TENSOROWEGO**

(Wykład na Studiach Doktoranckich w IPPT PAN)



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
WARSZAWA 2007

ISBN 978-83-89687-02-9

ISSN 0208-5658

Redaktor Naczelny:

doc. dr hab. Zbigniew Kotulski

Recenzent:

prof. dr hab. inż. Piotr Perzyna

Praca wpłynęła do Redakcji 30 czerwca 2006 r.

Skład: Zdzisław Nowak

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład: 100 egz. Ark. druk.: 11,6

Oddano do druku w maju 2007 roku

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

Poświęcam pamięci

Marii Duszek – Perzynie i Andrzejowi Königowi

*moim Przyjaciółom, z którymi razem zaczynaliśmy zgłębiać tajniki
rachunku tensorowego*

Spis treści

1. Wprowadzenie	7
1.1 Wstęp	7
1.2 Podstawowe pojęcia i postulaty w mechanice ośrodków ciągłych	8
1.3 Wybrane elementy logiki matematycznej i rachunku zdań	11
2. Struktury algebraiczne	17
2.1 Pojęcie grupy i ciała	18
2.2 Przestrzenie liniowe	20
2.3 Odwzorowania struktur algebraicznych	23
2.4 Przestrzenie euklidesowe	27
3. Tensory euklidesowe	33
3.1 Przestrzenie tensorowe	33
3.2 Działania na tensorach	36
3.3 Tensory drugiego rzędu	45
4. Automorfizmy przestrzeni tensorowych	55
4.1 Tensory ortogonalne	55
4.2 Automorfizmy przestrzeni tensorowych	58
4.3 Grupy symetrii tensora	60
4.4 Przykłady grup symetrii	64
5. Tensory czwartego rzędu-liniowa teoria sprężystości	69
5.1 Rozkład spektralny tensorów czwartego rzędu	69
5.2 Projekторы, moduły Kelvina	75
5.3 Tensor stanu granicznego-energetyczne stany własne	87
5.4 Grupy symetrii tensorów czwartego rzędu	102
6. Funkcje tensorowe	107
6.1 Funkcje tensorowe argumentu tensorowego	107
6.2 Grupy symetrii funkcji tensorowych	109
6.3 Podstawowe twierdzenia o reprezentacji funkcji tensorowych izotropowych	112

6.4	Wzór Sylwestra-Lagrange'a	116
6.5	Funkcje tensorowe potencjalne	121
7.	Pola tensorowe	123
7.1	Pola skalarne, wektorowe i tensorowe	123
7.2	Układy współrzędnych kartezjańskich	125
7.3	Współrzędne krzywoliniowe	129
8.	Różniczkowanie i całkowanie pól tensorowych	135
8.1	Operacje różniczkowe na polach tensorowych	136
8.2	Różniczkowanie pól tensorowych w układach kartezjańskich	141
8.3	Różniczkowanie pól tensorowych w układach krzywoliniowych	143
8.4	Operacje całkowe na polach tensorowych	149
8.5	Twierdzenia całkowe	157
9.	Czasoprzestrzeń fizyki klasycznej	161
9.1	Miara czasu	161
9.2	Odległość zdarzeń	163
9.3	Automorfizmy czasoprzestrzeni	164
9.4	Obserwator przestrzeni i układ odniesienia	166
	Dodatek	171
	Literatura	179
	Skorowidz	183

Rozdział 1. Wprowadzenie

1.1 Wstęp

Na początku studiowania mechaniki ośrodków ciągłych pewne trudności może nam sprawić wdrożenie się do korzystania z rachunku tensorowego oraz zdobycie umiejętności poprawnego posługiwania się zapisem indeksowym i absolutnym. Trudności te wynikają na ogół z nieznamości podstawowych pojęć i twierdzeń z algebry liniowej oraz z braku odpowiedniego przygotowania w zakresie algebry i analizy tensorowej.

Teoria tensorów jest teorią matematyczną, która pozwala podać jednolity język służący do opisu własności mechanicznych, termicznych, optycznych, elektrycznych i magnetycznych ośrodków materialnych, w tym kryształów i tekstur. Tensory występujące w tych dziedzinach są wykorzystywane do jawnego lub mniej jawnego opisu odwzorowań liniowych i wieloliniowych, jak również do opisu pojęć symetrii i niezmienniczości.

Pojęcie tensora można wprowadzić na wiele sposobów. Klasyczne ujęcie rachunku tensorowego jest opisem układów współrzędnych i operacji różniczkowych. Tensory jako obiekty geometryczne są wówczas definiowane odpowiedniego wymiaru tablicami liczb, które nazywamy reprezentacjami tensora w danym układzie współrzędnych. Przy zmianie układu współrzędnych transformują się one w zadany sposób. Jest to tak zwana definicja transformacyjna tensora, [9], [26]. Z drugiej strony, z algebry liniowej wynika, że tensory można wprowadzać jako operatory liniowe służące do opisu odwzorowań wieloliniowych, [13], [30]. Uogólniając pojęcie wektora można tensor definiować jako element przestrzeni liniowej odpowiedniego wymiaru, [25], [30].

Literatura dotycząca rachunku tensorowej jest dość bogata. Wymienimy zatem jedynie podstawowe opracowania z tej dziedziny np. [1], [12], [16], [20], [28], [37], [40], [43]. W większości monografii dotyczących mechaniki ośrodków ciągłych na ogół materiał podstawowy jest również poprzedzony wstępem dotyczącym rachunku tensorowego [24], [25], [38].

Przedstawiony w tym opracowaniu materiał zawiera podstawy rachunku tensorowego w zakresie maksymalnie zbliżonym do potrzeb mechaniki ośrodków ciągłych. Układ materiału, jak również podane w nim informacje tworzą pewną całość i pozwalają uzyskać wiedzę z algebry

i analizy tensorowej w zakresie niezbędnym do swobodnego studiowania mechaniki ośrodków ciągłych bez konieczności uzupełniania jej innymi źródłami. Zakres przedstawionego rachunku tensorowego jest ograniczony do potrzeb ze strony mechaniki ośrodków ciągłych.

Każdy dział mechaniki ma swój specyficzny aparat matematyczny. Podstawowym aparatem matematycznym, który jest stosowany w mechanice ośrodków ciągłych, jest rachunek tensorowy. Rachunek tensorowy, dzięki swej zwiezłości, umożliwia uproszczenie zapisu skomplikowanych operacji matematycznych będących odzwierciedleniem geometrycznie złożonego charakteru zjawisk fizycznych i zajęcie się stroną fizyczną tych zjawisk. A zatem, aby zająć się stroną fizyczną mechaniki ośrodków ciągłych, należy opanować podstawy rachunku tensorowego.

Przedstawiony w tym opracowaniu materiał stanowi systematyczne ujęcie wykładów z podstaw i zastosowania rachunku tensorowego, jakie od wielu lat prowadzone są przez autorkę w ramach Studium Doktoranckiego przy Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN.

1.2. Podstawowe pojęcia i postulaty w mechanice ośrodków ciągłych

Mechanika ośrodków ciągłych jest dziedziną, która sytuuje się na skrzyżowaniu mechaniki teoretycznej, fizyki i matematyki. Powstała ona w wyniku przyjęcia pewnych hipotez wzorowanych na newtonowskiej mechanice punktu materialnego. Wyróżnia się jednak niezależną aksjomatyką, specyficznymi metodami badań i odrębnym aparatem matematycznym.

Mechanika ośrodków ciągłych zajmuje się badaniem praw makroskopowych ruchów odkształcalnych obiektów materialnych i opisem zachowania się tych obiektów rządzonego przez te prawa. Ze względu na materialistyczne pojmowanie nieskończoności materii nie mogą istnieć prawa absolutne i dlatego w mechanice ośrodków ciągłych wprowadza się pewne obiekty modelowe dla ograniczonego zakresu zagadnień, przy wykorzystaniu metody abstrakcji, poprzez odrzucenie czynników, pojęć i relacji nieistotnych. Każdy model sformułowany w mechanice ośrodków ciągłych musi mieć sprecyzowany zakres stosowalności i dokładności.

Kryteriami słuszności konstrukcji modelowych, jak też i źródłem ich inspiracji, są eksperymenty. Eksperyment bez teorii, jako czyste gromadzenie faktów, jest na ogół bezużyteczny. Należy zatem teorię weryfikować w eksperymencie i na odwrót.

Mechanika ośrodków ciągłych zwana jest również **fenomenologiczną mechaniką ciał odkształcalnych**.

Fenomenologia – z greckiego phainomenon – zjawisko, logos-nauka jest filozoficzną nauką o fenomenach w sensie kantowskim, tj. o zjawiskowej, empirycznej stronie rzeczywistości. Zadaniem fenomenologii ma być „czysty opis” zjawisk rezygnujący z ich przyczynowego wyjaśnienia. Teorie fenomenologiczne pozwalają zbadać wiele zjawisk otaczającego nas świata, tzn. poznać przyczyny ich powstawania i sposób ich ewolucji bez konieczności posiadania wiedzy o zjawiskach zachodzących na poziomie molekularnym.

Fenomenologia w mechanice ośrodków ciągłych polega na takim zastosowaniu teorii abstrakcji, gdy nie wnika się w szczegóły mikroprocesów zachodzących w materiale na poziomie molekularnym, czy pojedynczego kryształu opisując jedynie tzw. zjawiska makroskopowe, obserwowane na poziomie agregatów, polikryształów. Fenomenologiczna czarna skrzynka, do której z jednego końca wkładamy dane mikroskopowe, pozwala z drugiego końca - wyciągać wnioski o charakterze makroskopowym.

Mechanika ośrodków ciągłych, ze względu na rozbudowany formalizm, jest również uważana za dział matematyki. Matematyka jest językiem, którym posługuje się mechanika ośrodków ciągłych i jest wykorzystywana w niej do:

- formułowania pojęć i relacji między nimi,
- sprowadzania rozpatrywanych zagadnień do poprawnie sformułowanych problemów matematycznych,
- ścisłego lub przybliżonego rozwiązywania problemów matematycznych, przy wskazaniu dokładności przybliżonego rozwiązania,
- selekcji rozwiązań z punktu widzenia mechaniki.

Związek matematyki z mechaniką ma podłoże historyczne. Każdy dział mechaniki ma swój specyficzny aparat matematyczny. I tak, np. w mechanice bryły sztywnej wykorzystywany jest rachunek wariacyjny, w mechanice cieczy – równania różniczkowe.

Podstawowym aparatem matematycznym, który jest stosowany w mechanice ośrodków ciągłych jest rachunek tensorowy.

W mechanice ośrodków ciągłych, stosując metodę abstrakcji, z góry rezygnujemy ze ścisłego definiowania niektórych pojęć przyjmując je jako pierwotne wzorując się na mechanice punktu materialnego.

Przez analogie do newtonowskiej mechaniki punktu materialnego w mechanice ośrodków ciągłych postuluje się, że

- **przestrzeń fizyczna**, tzn. otaczająca nas przestrzeń w której odbywa się ruch obiektu materialnego, jest modelowana punktową przestrzenią euklidesową;
- istnieje czas bezwzględny, pozwalający w zbiorze wszystkich zdarzeń wyróżnić zdarzenia równoczesne z punktu widzenia wszystkich obserwatorów w przestrzeni fizycznej. Z tych dwóch założeń wynika istnienie absolutnego układu inercjalnego z kartezjańską siatką;
- spełniona jest zasada przyczynowości i determinizmu zjawisk. Zasada ta nie jest spełniona w mechanice statystycznej;
- istnieje pojęcie **cząstki materialnej**. Jest to najmniejsza część ośrodka materialnego do którego odnosi się opis fenomenologiczny (dla gazu będzie to porcja przewyższająca wymiarem odległość swobodnego przebiegu molekuł, dla monokryształu - część znacznie większa od charakterystycznego wymiaru siatki krystalicznej, dla polikryształu - część znacznie większa od wymiaru ziaren krystalicznych itp.);
- istnieje pojęcie **ciała** jako bytu abstrakcyjnego, któremu przypisuje się pewne cechy wspólne dla wielu obiektów przyrody. Jedną z nich jest masa ciała, inną jest miejsce zajmowane przez ciało w przestrzeni fizycznej – geometria ciała. Proces zmiany miejsca zajmowanego przez ciało z upływem czasu nazywamy ruchem ciała. Ruch i deformacja ciała są skutkiem oddziaływań zewnętrznych typu mechanicznego i termicznego. Miarą tych oddziaływań są siły i momenty.

Ciało, rozumiane jest jako zbiór cząstek wraz z oddziaływaniami, podczas ruchu zajmuje w przestrzeni fizycznej obszary zwarte [15] (w sensie topologicznym) co wyraża się jako **hipoteza ciągłości**. Oznacza ona, że w obszarze zajmowanym aktualnie przez ciało dowolnemu punktowi przestrzeni fizycznej odpowiada pewna cząstka materialna. Punkt

obszaru, w którym znajduje się w danej chwili cząstka, nazywamy punktem materialnym, cały zaś obszar zajmowany przez ciało nazywamy obszarem materialnym. Z aksjomatu ciągłości wynika, że dwie różne cząstki nie mogą znajdować się jednocześnie w jednym i tym samym punkcie przestrzeni fizycznej i odwrotnie, jedna i ta sama cząstka nie może znajdować się równocześnie w dwóch różnych punktach przestrzeni fizycznej. A zatem między cząstkami ciała a punktami obszaru zajmowanego przez to ciało zachodzi jedno-jednoznaczna zależność. Założenie to jest dalekie od rzeczywistości. Świadczy o tym chociażby taki fakt, że np. dla żelaza stosunek gęstości do gęstości jąder atomowych wynosi około 10^{-13} co świadczyłoby raczej o tym, że w każdym punkcie mamy „pustkę”, która jest niezwykle energiczna.

W mechanice ośrodków ciągłych występują takie wielkości fizyczne jak gęstość, energia, praca itp. są to **skalary** wymiarowe zwane również tensorami rzędu zerowego. Są one określone przez przypisanie im tylko wartości liczbowej zależnej oczywiście od przyjętych jednostek. Podanie jedynie wartości liczbowej nie wystarczy do określenia takich wielkości fizycznych jak prędkość, siła, strumień ciepła itd. Konieczne jest dla nich podanie kierunku w przestrzeni. Takie wielkości nazywamy **wektorami** lub tensorami pierwszego rzędu. W mechanice ośrodków ciągłych występują również takie wielkości fizyczne jak naprężenie w cząstce, odkształcenie otoczenia cząstki. Do opisu matematycznego tych wielkości należy wprowadzić takie obiekty geometryczne, które nazywamy **tensorami** drugiego rzędu. Można je wprowadzić przez uogólnienie pojęcia wektora. Szczególną rolę w mechanice ośrodków ciągłych odgrywają tensory symetryczne drugiego rzędu. Im właśnie poświęcimy najwięcej uwagi. Modelując przestrzeń fizyczną trójwymiarową punktową przestrzenią euklidesową możemy, dla potrzeb mechaniki ośrodków ciągłych, ograniczyć się do rozpatrywania jedynie tensorów euklidesowych, które są elementami przestrzeni liniowych utworzonych z trójwymiarowych wektorowych przestrzeni euklidesowych.

1.3. Wybrane elementy logiki matematycznej i rachunku zdań

Matematyka jest nauką aksjomatyczno - dedukcyjną. Jest zatem nauką w której przyjmuje się bez określania pojęcia pierwotne oraz bez dowodu twierdzenia zw. aksjomatami, a następnie każde inne pojęcie, które nie jest

pojęciem pierwotnym definiuje się za pomocą pojęć pierwotnych, a każde twierdzenie, które nie jest aksjomatem dowodzi się zgodnie z prawami logiki, [27].

Przedmiotem logiki są związki między zdaniem. Zdaniem nazywamy wypowiedz orzekającą. Można jej przypisać (w ramach danej nauki) jedną z dwóch ocen: prawda albo fałsz – wartości logiczne zdania. Logika ustala wartość logiczną zdań złożonych na podstawie ustalonych uprzednio wartości logicznych zdań składowych.

W logice matematycznej występują następujące funktory:

- \sim negacja (zaprzeczenie),
- \wedge koniunkcja (iloczyn logiczny),
- \vee alternatywa (suma logiczna),
- \Rightarrow implikacja (wynikanie),
- \Leftrightarrow równoważność (\equiv).

Poza funktorami w logice matematycznej występują dwa zwroty – zwane kwantyfikatorami:

dla każdego x - kwantyfikator ogólny (duży) \forall_x ,

istnieje takie x - kwantyfikator szczegółowy (mały) \exists_x .

Kwantyfikatory te ułatwiają ściśle, jednoznaczne wypowiedzanie zdań.

Formą zdaniową (funkcją zdaniową) z jedną zmienną określoną na dziedzinie D , nazywamy takie wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem, gdy na miejsce zmiennej podstawimy dowolny element zbioru D . Jeżeli formę zdaniową z jedną zmienną poprzedzimy kwantyfikatorem odnoszącym się do tej zmiennej to otrzymamy zdanie.

Dwa zdania o tej samej wartości logicznej nazywamy równoważnymi.

W logice matematycznej posługujemy się następującą notacją:

- $a \in A$ element a należy do zbioru A ,
- $a \notin A \equiv \sim a \in A$ element a nie należy do zbioru $A \equiv$ nieprawdą jest, że element $a \in A$,
- $\alpha \Rightarrow \beta$ z α wynika β ,
- $\alpha \Leftrightarrow \beta$ z α wynika β i z β wynika α ,
- $\forall_a \varphi(a)$ istnieje takie a , że zachodzi $\varphi(a)$,

$\bigvee_{a \in A} \varphi(a)$	istnieje takie a należące do A , że zachodzi $\varphi(a)$,
$\bigvee_a^1 \varphi(a)$	istnieje i jest jedno takie a , że zachodzi $\varphi(a)$,
$\bigvee_{a \in A}^1 \varphi(a)$	istnieje i jest jedno takie a należące do A , że zachodzi $\varphi(a)$,
$\bigwedge_a \varphi(a)$	dla każdego a zachodzi $\varphi(a)$,
$\bigwedge_{a \in A} \varphi(a)$	dla każdego a należącego do A zachodzi $\varphi(a)$.

Zbiór $N = \{x \in A; \varphi(x)\}$ lub $N = \{x \in A \mid \varphi(x)\}$ jest zbiorem wszystkich tych x należących do A , które spełniają $\varphi(x)$.

Iloczynem kartezjański dwóch zbiorów A, B - nazywamy zbiór $A \times B$, którego elementami są uporządkowane pary utworzone z elementów zbiorów A, B . Niech zbiór A będzie zbiorem elementów a, b, c, \dots , zaś zbiór B będzie zbiorem elementów x, y, z, \dots . Iloczynem kartezjańskim tych zbiorów $A \times B$ jest zbiór uporządkowanych par $(a, x), (b, y), (c, z), \dots$

Sumą prostą dwóch zbiorów A, B nazywamy zbiór $U = A \oplus B$, którego elementy można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci sumy elementów zbiorów A, B . Jeżeli element $u \in U$ to istnieje jednoznaczny rozkład tego elementu na u_a i u_b taki, że $u = u_a + u_b$ i $u_a \in A$, $u_b \in B$. I tak np. przestrzeń tensorów drugiego rzędu jest sumą prostą przestrzeni tensorów symetrycznych i przestrzeni tensorów antysymetrycznych.

Zaprzeczenie zdań (Prawa de Morgana):

zaprzeczenie alternatywy

$$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q);$$

zaprzeczenie koniunkcji

$$\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q);$$

zaprzeczenie implikacji

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q);$$

zaprzeczenie zdania z kwantyfikatorem

$$\sim \bigwedge_a \varphi(a) \Leftrightarrow \bigvee_a \sim \varphi(a),$$

$$\sim \bigvee_a \varphi(a) \Leftrightarrow \bigwedge_a \sim \varphi(a).$$

Reguła odrywania (najczęściej stosowane prawo logiki)

Jeżeli prawdziwe są: implikacja $p \Rightarrow q$ oraz poprzednik p , to można z tej implikacji oderwać następnik q nadając mu samoistny byt i przyjąć jako zdanie prawdziwe.

Prawo przechodności implikacji

Jeżeli prawdziwe są dwie implikacje: $p \Rightarrow q$ i $q \Rightarrow r$ to prawdziwa jest implikacja $p \Rightarrow r$.

Warunek konieczny i warunek wystarczający

Jeżeli prawdziwa jest implikacja $p \Rightarrow q$ to mówimy, że p jest warunkiem wystarczającym dla q , natomiast q jest warunkiem koniecznym dla p . Warunek wystarczający może nie być warunkiem koniecznym. I tak np. symetria tensora drugiego rzędu jest warunkiem wystarczającym na to aby jego wartości własne były rzeczywiste. Symetria tensora nie jest jednak warunkiem koniecznym na to aby wartości własne tensora były rzeczywiste. Warunek konieczny może nie być warunkiem wystarczającym. I tak np. zerowanie się pierwszej pochodnej funkcji jednej zmiennej jest warunkiem koniecznym na to aby istniało ekstremum funkcji. Warunek ten nie jest jednak warunkiem wystarczającym. W punkcie zerowania się pierwszej pochodnej może istnieć punkt przegięcia. Jeżeli warunek konieczny jest jednocześnie warunkiem wystarczającym to wówczas mówimy, że jest to warunek konieczny i wystarczający.

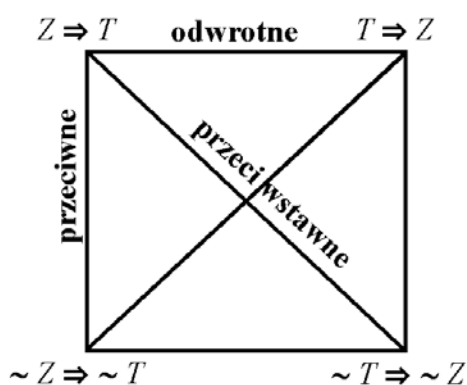
Każde twierdzenie matematyczne można wypowiedzieć w postaci implikacji: jeżeli założenie to teza. W twierdzeniu założenie stanowi warunek wystarczający na to, aby teza tego twierdzenia była prawdziwa. Założenie to nie stanowi warunku koniecznego.

Twierdzenia matematyczne mają różnorodną budowę.

Jeżeli twierdzenie $Z \Rightarrow T$ jest twierdzeniem prostym, to
 twierdzenie $T \Rightarrow Z$ jest twierdzeniem odwrotnym
 twierdzenie $\sim Z \Rightarrow \sim T$ jest twierdzeniem przeciwnym, zaś
 twierdzenie $\sim T \Rightarrow \sim Z$ jest twierdzeniem przeciwstawnym.

Twierdzenia proste i przeciwstawne mają taką samą wartość logiczną, również twierdzenia odwrotne i przeciwe mają taką samą wartość logiczną. Dowód twierdzenia prostego można zastąpić dowodem twierdzenia przeciwstawnego.

Kwadrat logiczny stanowi zamknięty układ implikacji Rys.1. Na przekątnych kwadratu znajdują się twierdzenia przeciwstawne. Implikacje zaznaczone na końcach tej samej przekątnej są równoważne. Na jego bokach natomiast są twierdzenia odwrotne i przeciwe. Prawdziwość dwóch implikacji przy końcach jednego boku kwadratu zapewnia prawdziwość wszystkich czterech.



Rys. 1. Zamknięty układ implikacji.

Z kwadratu logicznego wynika, że

$$(Z \Rightarrow T) \Leftrightarrow (\sim T \Rightarrow \sim Z).$$

Zamknięty układ twierdzeń stanowi każda z dwóch par:

$$\{Z \Rightarrow T \text{ i } \sim Z \Rightarrow \sim T\}, \{T \Rightarrow Z \text{ i } \sim T \Rightarrow \sim Z\}.$$

Z prawdziwości wszystkich twierdzeń stanowiących układ zamknięty wynika prawdziwość wszystkich twierdzeń do nich odwrotnych.

Znajomość przedstawionych elementów logiki pozwoli nam w sposób precyzyjny formułować pewne twierdzenia i wyciągać z nich właściwe wnioski.

Rozdział 2. Struktury algebraiczne

Przestrzeń jako pojęcie pierwotne jest jedną z form istnienia materii. Pod pojęciem przestrzeni we współczesnej matematyce rozumie się zbiór dowolnych obiektów, między którymi ustalone są pewne związki. Przestrzenią fizyczną natomiast nazywamy otaczającą nas przestrzeń w której zachodzą zjawiska fizyczne.

W wyniku bezpośredniej obserwacji otaczających nas przedmiotów i relacji między nimi powstała koncepcja *geometrii euklidesowej*. Była ona podstawą myślenia twórców mechaniki Newtona i stała się podstawą fizyki klasycznej, przyrodoznawstwa i techniki. Geometria euklidesowa odzwierciedla dwie relacje między obiektami: relację liniowości i relację prostokątowości. Z pierwszą związana jest koncepcja przestrzeni liniowej, zaś z drugą pojęcie iloczynu skalarnego.

W ten sposób powstał matematyczny model *punktowej przestrzeni euklidesowej* \mathcal{E}_3 , której elementami są punkty jako obrazy ciał uznawanych za nieruchome i zaniedbywalnie małe. Zbiór uporządkowanych par punktów przestrzeni punktowej z dodawaniem, mnożeniem przez liczbę i iloczynem skalarnym tworzy *przestrzeń euklidesową wektorową* \mathfrak{E}_3 , [2].

W mechanice ośrodków ciągłych postuluje się, że przestrzeń fizyczna jest modelowana przestrzenią euklidesową punktową \mathcal{E}_3 , którą można odwzorować w przestrzeń euklidesową wektorową \mathfrak{E}_3 . Przestrzeń euklidesowa wektorowa jest zatem przestrzenią, której elementami są wektory i jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych z pewnym prawem kompozycji wewnętrznej zwanej iloczynem skalarnym.

Przestrzeń fizyczna jest przestrzenią jednorodną i izotropową. Jednorodność przestrzeni jest równoważna założeniu, że prawa fizyczne nie zależą od miejsca wystąpienia zjawiska. Izotropowość natomiast oznacza, że wszystkie kierunki w przestrzeni są równoważne. Z tych dwóch własności wynika równoważność wszystkich przestrzennych układów współrzędnych użytych do opisu badanego zjawiska. Niezmienniczość praw fizycznych przy zmianie przestrzennych układów współrzędnych można wyrazić stosując rachunek tensorowy. Zgodnie z podstawową własnością rachunku tensorowego nie zachodzi potrzeba wiązania się z jakimkolwiek układem współrzędnych.

W celu zdefiniowania przestrzeni euklidesowej wektorowej jako tworzywa przestrzeni tensorów euklidesowych należy wprowadzić pojęcie

struktury algebraicznej, najprostszych struktur algebraicznych jakimi są grupa i ciało oraz pojęcie przestrzeni liniowej, [13], [18], [30].

STRUKTURĄ ALGEBRAICZNĄ nazywamy zbiór złożony ze skończonej liczby zbiorów oraz ze skończonej liczby odwzorowań iloczynów kartezjańskich tych zbiorów w te zbiory. Odwzorowania wchodzące w skład struktury nazywamy działaniami.

2.1 Pojęcie grupy i ciała

Do najprostszych struktur algebraicznych należą grupa i ciało.

Grupą nazywamy strukturę algebraiczną (G, \diamond) , gdzie G jest zbiorem niepustym, a działanie \diamond jest odwzorowaniem

$$\diamond : G \times G \rightarrow G,$$

$$(g, h) \in G \times G \Rightarrow g \diamond h \in G.$$

Działanie to spełnia następujące aksjomaty:

a) własność łączności

$$\bigwedge_{g_1, g_2, g_3 \in G} g_1 \diamond (g_2 \diamond g_3) = (g_1 \diamond g_2) \diamond g_3;$$

b) e –element neutralny grupy

$$\bigvee_{e \in G} \bigwedge_{g \in G} e \diamond g = g \diamond e = g; \quad (2.1)$$

c) h –element odwrotny do g

$$\bigwedge_{g \in G} \bigvee_{h \in G} g \diamond h = h \diamond g = e.$$

Jeśli grupa spełnia ponadto warunek

$$\bigwedge_{g, h \in G} g \diamond h = h \diamond g \quad (2.2)$$

to nazywamy ją grupą abelową (grupą przemienną).

Przykłady grup:

- 1) $(\mathbb{Z}, +)$ addytywna grupa liczb całkowitych ($e = 0, h = -g$);
- 2) $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ addytywna ($e = 0, h = -g$) i multiplikatywna ($e = 1, h = g^{-1}$) grupy liczb rzeczywistych;
- 3) Zbiór wszystkich obrotów przestrzeni wokół ustalonej osi jest grupą.

Działaniem w grupie jest składanie obrotów.

Każdy obrót można opisać wersorem k skierowanym wzdłuż osi obrotu i kątem α o który zachodzi obrót wokół osi. Kąt α jest liczony w kierunku, który jest dodatnim względem wersora k .

Złożeniem dwóch obrotów o kąty α i β jest obrót o kąt $(\alpha + \beta)$. Obrotami wzajemnie przeciwnymi nazywamy dwa obroty w przeciwnych kierunkach o ten sam kąt.

Jeżeli obrót wokół osi o kierunku k o kąt α oznaczymy przez R_k^α to

$$R_k^\alpha R_k^\beta = R_k^{\alpha+\beta};$$

$$R_k^\alpha R_k^{-\alpha} = R_k^0.$$

Grupa jest jedną z najprostszych struktur algebraicznych.

Ciałem nazywamy strukturę algebraiczną $(\mathcal{K}, +, \cdot)$, gdzie odwzorowania

$$+ : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}; \quad (\alpha, \beta) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathcal{K},$$

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}; \quad (\alpha, \beta) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathcal{K}$$

są odwzorowaniami spełniającymi następujące aksjomaty:

- a) $(\mathcal{K}, +)$ jest grupą abelową;
- b) $(\mathcal{K} - \{0\}, \cdot)$ jest grupą abelową, gdzie $\{0\}$ jest elementem neutralnym grupy $(\mathcal{K}, +)$;
- c) rozdzielnosc względem dodawania

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{K}$$

Strukturę algebraiczną o powyższych własnościach nazywa się często ciałem przemienne.

Przykłady ciał:

- 1) $(\mathcal{W}, +, \cdot)$ ciało liczb wymiernych;
- 2) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ ciało liczb rzeczywistych;
- 3) $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ ciało liczb zespolonych $\mathcal{C} = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$.

Działania w \mathcal{C} są określone następująco:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b), \quad \text{dla } (a, b), (a', b') \in \mathcal{C}.$$

Ciało \mathcal{K} nazywamy algebraicznie domkniętym (lub zupełnym) jeśli każdy wielomian jednej zmiennej o współczynnikach z ciała \mathcal{K} ma w ciele \mathcal{K} miejsce zerowe. (**Zasadnicze twierdzenie algebry**)

Ciało $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ - liczb zespolonych jest ciałem algebraicznie domkniętym.

2.2. Przestrzenie liniowe

Bardziej złożoną strukturą algebraiczną niż grupa i ciało jest struktura algebraiczna zwana przestrzenią liniową. Badanie tej struktury jest przedmiotem działu algebry, który nosi nazwę algebry liniowej.

Przestrzenią liniową \mathcal{L} nad ciałem \mathcal{K} nazywamy strukturę algebraiczną $(\mathcal{L}, +; \mathcal{K}, +, \cdot; \cdot)$ dla której:

- $(\mathcal{L}, +)$ jest grupą abelową;
- $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ jest ciałem;
- mnożenie elementów zbioru \mathcal{L} przez elementy zbioru \mathcal{K}
 $\cdot: \mathcal{K} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$

$(\alpha, A) \in \mathcal{K} \times \mathcal{L} \Rightarrow \alpha \cdot A = \alpha A \in \mathcal{L}$ (znak mnożenia został opuszczony)

spełnia aksjomaty:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\alpha \in \mathcal{K}} \bigwedge_{A, B \in \mathcal{L}} \quad & \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, \\ \bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathcal{K}} \bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \quad & (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \\ \bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathcal{K}} \bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \quad & \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \\ \bigvee_{1 \in \mathcal{K}} \bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \quad & 1A = A1 = A, \quad 1 - \text{element neutralny ciała } \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Przestrzenią liniową nazywamy zatem dowolny zbiór \mathcal{L} o określonej powyżej strukturze. Na ogół nie precyzujemy czym są elementy tego zbioru.

Przestrzeń liniową \mathcal{L} nazywamy przestrzenią n – wymiarową i oznaczamy przez \mathcal{L}_n , jeżeli istnieje w niej liniowo niezależny układ rzędu n i nie istnieje liniowo niezależny układ rzędu większego od n .

Układem liniowo niezależnym rzędu n nazywamy każdy zbiór n elementów $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{L}_n$ taki, że z równości

$$\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \dots + \alpha^n A_n = 0$$

wynika, że

$$\alpha^1 = \alpha^2 = \dots = \alpha^n = 0.$$

Bazą w przestrzeni \mathcal{L}_n nazywamy każdy liniowo niezależny układ n elementów

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{L}_n.$$

Jeżeli układ $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{L}_n$ jest baza w \mathcal{L}_n , to

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}_n} \bigvee_{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n \in \mathcal{K}} A = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \dots + \alpha^n A_n. \quad (2.5)$$

Układ A_1, A_2, \dots, A_n generuje więc całą przestrzeń \mathcal{L}_n . Elementy $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n \in \mathcal{K}$ przyporządkowane są elementowi A w bazie A_1, A_2, \dots, A_n w sposób jednoznaczny.

Powyższe zapisy są prostsze jeżeli skorzystamy z **konwencji sumacyjnej Einsteina**. Zgodnie z tą konwencją każdy jednomian w którym dwukrotnie powtórzony jest pewien indeks, raz na poziomie dolnym i drugi raz na poziomie górnym należy rozumieć jako sumę jednomianów powstających z danego przez wpisanie zamiast powtarzającego się indeksu wszystkich jego wartości od 1 do n (n – wymiar przestrzeni). Powtarzający się indeks nazywamy **niemym**. Nazwę indeksu niemego można zmieniać. Reguła ta ma charakter czysto mnemotechniczny.

Ciąg elementów A_1, A_2, \dots, A_n można zapisać jako A_i (i – od 1 do n). Indeks i nazywamy **swobodnym**.

Korzystając z konwencji sumacyjnej Einsteina możemy napisać, że

$$A = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2 + \dots + \alpha^n A_n = \alpha^k A_k = \alpha^m A_m.$$

PRZESTRZENIE SPRZEŻONE

Dwie przestrzenie liniowe o tym samym wymiarze i nad tym samym ciałem: \mathcal{L}_n i \mathcal{M}_n nad ciałem \mathcal{K} nazywamy wzajemnie sprzężonymi (dualnymi) $\mathcal{L}_n^\bullet = \mathcal{M}_n$, jeżeli na iloczynie kartezjańskim tych przestrzeni

określone jest odwzorowanie zwane operacją sprzęgającą, które jest formą biliniową niezdegenerowaną.

Operacja sprzęgająca każdej parze elementów przyporządkowuje skalar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n \times \mathcal{M}_n &\rightarrow \mathcal{K}, \\ (A, a) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{M}_n &\Rightarrow \langle A, a \rangle \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Przyporządkowanie to jest liniowe względem elementów przestrzeni \mathcal{L}_n i elementów przestrzeni \mathcal{M}_n oraz spełnia następujące warunki :

$$\begin{aligned} \text{jeśli } \langle A, a \rangle = 0 &\quad \text{dla każdego elementu } A \in \mathcal{L}_n, \text{ to } a = 0, \\ \text{jeśli } \langle A, a \rangle = 0 &\quad \text{dla każdego elementu } a \in \mathcal{M}_n, \text{ to } A = 0. \end{aligned}$$

W definicji tej obie przestrzenie występują równoważnie. Możemy zatem napisać $\mathcal{L}_n^\bullet = \mathcal{M}_n$ lub $\mathcal{L}_n = \mathcal{M}_n^\bullet$. Stąd wynika, że dla każdej przestrzeni liniowej spełniona jest równość $(\mathcal{L}_n^\bullet)^\bullet = \mathcal{L}_n$.

Pomimo, że przestrzenie sprzężone (dualne) występują w definicji równoważnie, to jedna z nich jest zwykle wyróżniona z różnych powodów. Może np. występować częściej. Nazywamy ją wówczas przestrzenią podstawową. Oznaczmy ją przez \mathcal{N} , a jej elementy będziemy oznaczać przez \mathbf{x} , ($\mathbf{x} \in \mathcal{N}$). Bazą w tej przestrzeni będą elementy \mathbf{e}_i . Elementy przestrzeni do niej sprzężonej będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{\zeta}$, ($\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{N}^\bullet$). Bazą w tej przestrzeni będą stanowiły elementy $\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha$. Elementy przestrzeni podstawowej nazywane są często wektorami, zaś elementy przestrzeni sprzężonej kowektorami.

Operacja sprzężenia $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta} \rangle$ przypomina iloczyn skalarny i będzie z nim utożsamiana dla przestrzeni euklidesowych $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta} \rangle \equiv \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\zeta}$.

Należy jednak pamiętać, że w odróżnieniu od iloczynu skalarnego operacja sprzężenia oznacza mnożenie elementów z dwóch różnych przestrzeni liniowych. Elementy $\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}$ nazywamy ortogonalnymi, gdy $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\zeta} = 0$. Niezdegenerowane mnożenie skalarne oznacza, że w \mathcal{N} nie istnieje wektor

niezerowy ortogonalny do całej przestrzeni \mathcal{N}^* , i analogicznie w \mathcal{N}^* nie istnieje kowektor niezerowy ortogonalny do całej przestrzeni \mathcal{N} .

Podstawą wielu stwierdzeń i dowodów jest następujący fakt:

jeżeli ciąg wektorów $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ jest dowolną, ustaloną bazą w \mathcal{N} , a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jest dowolnym ciągiem liczb (elementem R^n) to istnieje dokładnie jeden kowektor $\boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{N}^*$ taki, że $\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Dowód tego faktu wynika z równości wymiarów przestrzeni dualnych oraz z założenia, że operacja sprzęgająca dwie przestrzenie dualne jest niezwyrodniała.

Z podanego faktu wynika również następujący ważny wniosek:

dla każdej bazy \mathbf{e}_i w przestrzeni \mathcal{N} istnieje dokładnie jedna baza $\boldsymbol{\varepsilon}^j$ w przestrzeni sprzężonej \mathcal{N}^* taka, że (D.1)

$$\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^j = \boldsymbol{\varepsilon}^j \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^j. \quad (2.6)$$

Zdefiniowaną tym wzorem bazę $\boldsymbol{\varepsilon}^j$ nazywamy zwykle kobazą bazy \mathbf{e}_i .

Parę baz $\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\varepsilon}^j$ nazywamy dualną parą baz. Operowanie dualnymi parami baz znacznie upraszcza niektóre dowody i rachunki. Np.

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\zeta} = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot (\zeta_j \boldsymbol{\varepsilon}^j) = x^i \zeta_j (\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^j) = x^i \zeta_j \delta_j^i = x^i \zeta_i.$$

$$x^i = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^i, \quad \zeta_i = \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_i.$$

2.3. Odwzorowania struktur algebraicznych

Poza strukturami algebraicznymi interesują nas odwzorowania pomiędzy tymi strukturami. Nie będą to dowolne odwzorowania ale odwzorowania, które będą posiadały pewne własności. Będą one mianowicie zachowywały własności tych struktur. Te szczególne odwzorowania noszą nazwę *morfizmów* lub *homomorfizmów* struktur algebraicznych, [13].

Dla grup, gdy $(\mathcal{G}, \diamond), (\mathcal{H}, \diamond)$ są dwiema grupami, to odwzorowanie

$f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy *homomorfizmem* grup, jeżeli

$$\bigwedge_{g, h \in \mathcal{G}} f(g \diamond h) = f(g) \diamond f(h).$$

Odwracalny (bijektywny) homomorfizm grup nazywamy **izomorfizmem**. Natomiast izomorfizm grupy na siebie nazywamy **automorfizmem**. Homomorfizm grupy w siebie nazywamy **endomorfizmem**. Tak więc automorfizm jest to odwracalny (bijektywny) endomorfizm.

Podobne odwzorowania można zdefiniować dla ciał oraz przestrzeni liniowych.

ODWZOROWANIA PRZESTRZENI LINIOWYCH

Niech \mathcal{L}_n i \mathcal{N}_m będą dwiema przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem \mathcal{K} .

Odwzorowanie $L: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{N}_m$ nazywamy **odwzorowaniem liniowym** (homomorfizmem), jeżeli

$$\bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathcal{K}} \bigwedge_{A, B \in \mathcal{L}_n} L(\alpha A + \beta B) = \alpha L(A) + \beta L(B). \quad (2.7)$$

Bijektywny homomorfizm przestrzeni liniowych nazywamy **izomorfizmem**. Dwie przestrzenie liniowe \mathcal{L}_n i \mathcal{N}_m nad tym samym ciałem \mathcal{K} nazywamy izomorficznymi jeżeli istnieje izomorfizm tych przestrzeni na siebie. Innymi słowy istnieje wzajemnie jednoznaczne liniowe przyporządkowanie elementom zbioru \mathcal{L}_n elementów zbioru \mathcal{N}_m .

Izomorficzne przestrzenie liniowe są nierozróżnialne. Są one relacjami tej samej teorii. Każde zdanie wypowiedziane w terminach jednej przestrzeni daje się jednoznacznie „przetłumaczyć” na język przestrzeni izomorficznej. Każde dwie przestrzenie liniowe tego samego wymiaru są izomorficzne.

Przykład:

Każda przestrzeń \mathcal{L}_n nad ciałem \mathcal{R} (liczb rzeczywistych) jest przestrzenią izomorficzną z przestrzenią

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}.$$

Jeżeli elementy A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tworzą bazę w \mathcal{L}_n , to

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \bigvee_{\alpha^i \in \mathcal{R}} A = \sum_{i=1}^n \alpha^i A_i.$$

Reprezentację A w bazie A_i tworzy ciąg skalarów α^i ($\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$) z \mathcal{R} utożsamianych z elementami przestrzeni \mathcal{R}^n .

Różnica między samym elementem $A \in \mathcal{L}_n$ a układem skalarów α^i należących do \mathcal{R} jest bardzo istotna. A mianowicie, każdy układ skalarów α^i zawierający przynajmniej jeden element $\alpha^k \neq 0$ jest reprezentacją zadanego elementu A w pewnej bazie. Baz takich jest nieskończenie wiele, jeżeli przynajmniej dwa skalary α^i są różne od zera. Tzn., że

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{L}} \bigwedge_{\alpha^i \in \mathcal{R}} \bigvee_{B_k \in \mathcal{L}} A = \alpha^k B_k \quad A \neq 0.$$

FORMA LINIOWA

Szczególnym przypadkiem odwzorowania liniowego $L: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{N}_m$ jest odwzorowanie, gdy $m=1$ i przestrzeń $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_1 = \mathcal{K}$. Zachodzi wtedy równość

$$L: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathcal{N}_1 = \mathcal{K}$$

$$L(A) = \phi(A) = \alpha \in \mathcal{K}.$$

Odwzorowanie tej postaci nazywamy **formą liniową** ϕ nad przestrzenią liniową \mathcal{L}_n .

ODWZOROWANIE BILINIOWE

Niech $\mathcal{L}_n, \mathcal{N}_m$ i \mathcal{M}_k będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem \mathcal{K} .

Odwzorowanie

$$B: \mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m \rightarrow \mathcal{M}_k$$

$$(A, a) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m \Rightarrow B(A, a) \in \mathcal{M}_k$$

nazywamy **biliniowym**, jeśli

$$\begin{aligned} B(A+B, a) &= B(A, a) + B(B, a), \\ B(A, a+b) &= B(A, a) + B(A, b), \\ B(\beta A, a) &= B(A, \beta a) = \beta B(A, a), \end{aligned} \tag{2.8}$$

dla każdego $\beta \in \mathcal{K}$, dla każdego $A, B \in \mathcal{L}_n$ i dla każdych $a, b \in \mathcal{N}_m$.

FORMA BILINIOWA

Jeżeli przestrzeń \mathcal{M}_k jest ciałem \mathcal{K} ($k=1$), to odwzorowanie

$$B: \mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m \rightarrow \mathcal{M}_1 = \mathcal{K}$$

$$(A, a) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m \Rightarrow B(A, a) \in \mathcal{K}$$

nazywamy **formą biliniową**. W ten sposób można definiować odwzorowania wieloliniowe i formy wieloliniowe.

SUMA PROSTA PRZESTRZENI LINIOWYCH

Najprostszym przykładem budowania, w oparciu o znane przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem \mathcal{K} , nowej przestrzeni liniowej jest **suma prosta**.

W celu zdefiniowania sumy prostej podajemy definicję sumy algebraicznej, [13].

Niech \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2 będą podzbiorami przestrzeni liniowej \mathcal{L}_n . Zbiór

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \{ A_1 + A_2 \in \mathcal{L}_n; A_1 \in \mathcal{V}_1, A_2 \in \mathcal{V}_2 \}$$

nazywamy **sumą algebraiczną podzbiorów** \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2 .

Sumę algebraiczną podprzestrzeni \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2 nazywamy sumą prostą $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$, jeżeli każdy element sumy daje się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy elementów przestrzeni \mathcal{V}_1 i \mathcal{V}_2 .

Sumą prostą przestrzeni liniowych \mathcal{L}_n i \mathcal{N}_m nad tym samym ciałem \mathcal{K} nazywamy przestrzeń $\mathcal{M}_{n+m} = \mathcal{L}_n \oplus \mathcal{N}_m$ powstającą z iloczynu kartezjańskiego $\mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m$ przez zdefiniowanie w tym zbiorze operacji dodawania i mnożenia przez elementy ciała \mathcal{K} tak, że

$$\bigwedge_{A, B \in \mathcal{L}_n} \bigwedge_{a, b \in \mathcal{N}_m} \bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathcal{K}} \alpha(A, a) + \beta(B, b) = (\alpha A + \beta B, \alpha a + \beta b),$$

\mathcal{M}_{n+m} - przestrzeń liniowa. (2.9)

Każdy element przestrzeni $\mathcal{L}_n \oplus \mathcal{N}_m$ daje się jednoznacznie przedstawić w postaci sumy elementów przestrzeni \mathcal{L}_n i \mathcal{N}_m . Wymiar przestrzeni $\mathcal{L}_n \oplus \mathcal{N}_m$ wynosi $n+m$.

ILOCZYN TENSOROWY PRZESTRZENI LINIOWYCH

Iloczynem tensorowym przestrzeni liniowych \mathcal{L}_n i \mathcal{N}_m nad tym samym ciałem \mathcal{K} nazywamy przestrzeń liniową $\mathcal{M}_{n \cdot m} = \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{N}_m$ powstającą z iloczynu kartezjańskiego $\mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m$. Wymiar przestrzeni $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{N}_m$ wynosi $n \cdot m$.

Przyporządkowanie

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m &\rightarrow \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{N}_m, \\ (A, a) \in \mathcal{L}_n \times \mathcal{N}_m &\Rightarrow A \otimes a \in \mathcal{L}_n \otimes \mathcal{N}_m \end{aligned}$$

jest przykładem odwzorowania biliniowego.

Spełnia zatem następujące aksjomaty:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{A \in \mathcal{L}_n} \bigwedge_{a, b \in \mathcal{N}_m} A \otimes (a + b) &= A \otimes a + A \otimes b, \\ \bigwedge_{A, B \in \mathcal{L}_n} \bigwedge_{a \in \mathcal{N}_m} (A + B) \otimes a &= A \otimes a + B \otimes a, \\ \bigwedge_{A \in \mathcal{L}_n} \bigwedge_{b \in \mathcal{N}_m} \bigwedge_{\alpha \in \mathcal{K}} \alpha A \otimes b &= A \otimes \alpha b = \alpha (A \otimes b). \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.4. Przestrzenie euklidesowe

Przestrzenią euklidesową wektorową \mathfrak{E}_n nazywamy n – wymiarową przestrzeń liniową (2.4) nad ciałem liczb rzeczywistych \mathcal{R} , w której dodatkowo jest zdefiniowana operacja iloczynu skalarnego. Elementami przestrzeni są wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ [29].

Iloczynem skalarnym nazywamy formę biliniową taką, że

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{E}_n \times \mathfrak{E}_n &\rightarrow \mathcal{R}, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{E}_n \times \mathfrak{E}_n &\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jest to prawo kompozycji przyporządkowujące dwóm wektorom skalar (liczbę). Odwzorowanie to spełnia następujące aksjomaty:

1. $\bigwedge_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{E}_n} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,

$$2. \bigwedge_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathfrak{E}_n} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

$$3. \bigwedge_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{E}_n} \bigwedge_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}),$$

$$4. \bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathfrak{E}_n} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad \text{i} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{a} = 0.$$

Norma – modulem wektora \mathbf{a} nazywamy liczbę a o własnościach:

$$a = |\mathbf{a}| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{\frac{1}{2}},$$

$$|\mathbf{a}| \geq 0 \quad |\mathbf{a}| = 0 \quad \text{dla} \quad \mathbf{a} = 0,$$

$$|\alpha \mathbf{a}| = |\alpha| |\mathbf{a}|$$

$$\bigwedge_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{E}_n} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad (\text{nierówność Schwartza}).$$

Wektor \mathbf{a} , dla którego $|\mathbf{a}| = 1$ nazywamy **wersorem**.

Kąt φ , który jest kątem między wektorami \mathbf{a} i \mathbf{b} wyznaczamy ze wzoru

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (2.12)$$

Jeżeli wektory \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są bazą w \mathfrak{E}_n , to generują one całą przestrzeń.

W mechanice ośrodków ciągłych interesuje nas głównie przestrzeń euklidesowa trójwymiarowa \mathfrak{E}_3 (\mathfrak{E}_n dla $n = 3$) tzn. przestrzeń wektorowa euklidesowa, w której bazą jest dowolna trójka liniowo niezależnych wektorów. Jeżeli wektory \mathbf{e}_i ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) są bazą w \mathfrak{E}_3 , to

$$\bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathfrak{E}_n} \bigvee_{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \in \mathbb{R}} \mathbf{a} = \alpha^1 \mathbf{e}_1 + \alpha^2 \mathbf{e}_2 + \alpha^3 \mathbf{e}_3 = \alpha^k \mathbf{e}_k.$$

Trójkę liczb α^i , przyporządkowaną jednoznacznie wektorowi \mathbf{a} w bazie \mathbf{e}_i , nazywamy **reprezentacją wektora** \mathbf{a} w tej bazie. Jeżeli baza \mathbf{e}_i

jest ustalona, to wektor \mathbf{a} można utożsamić z jego reprezentacją, tzn. z trójką liczb α^i . Należy pamiętać, że te trójki liczb przyporządkowane temu samemu wektorowi w różnych bazach będą inne. Zachodzi zatem zależność

$$\bigwedge_{\mathbf{a} \neq 0 \in \mathfrak{E}_3} \quad \bigwedge_{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}} \quad \bigvee_{\mathbf{g}_k \in \mathfrak{E}_3} \quad \mathbf{a} = \alpha \mathbf{g}_1 + \beta \mathbf{g}_2 + \gamma \mathbf{g}_3,$$

a więc każda trójka liczb takich, że przynajmniej jedna z nich jest różna od zera, może być reprezentacją zadanego wektora w odpowiednio dobranej bazie.

Przestrzeń euklidesowa \mathfrak{E}_3 jest przestrzenią liniową, posiada zatem wszystkie własności przestrzeni liniowych.

Dla przestrzeni euklidesowej \mathfrak{E}_3 operacja iloczynu skalarnego jest formą biliniową, a więc może być uznana za operację sprzęgającą przestrzeń euklidesową ze sobą samą.

Jeżeli \mathfrak{E}_3^* jest przestrzenią sprzężoną (dualną) do przestrzeni \mathfrak{E}_3 , to przestrzenie te są izomorficzne. Na tej podstawie przyjmuje się, że $\mathfrak{E}_3^* = \mathfrak{E}_3$. Pomimo przyjęcia takiego założenia pozostawiamy, ze względów rachunkowych, pojęcie bazy i kobazy jako baz w tej samej przestrzeni euklidesowej \mathfrak{E}_3 .

Kobazą bazy \mathbf{e}_i nazywamy taką bazę \mathbf{e}^j , dla której

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \quad (\text{delta Kronecker'a}) \quad \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Macierz $g_{mn} \equiv \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n$ nazywamy **macierzą metryczną**. Dla danej bazy \mathbf{e}_i jej kobaza \mathbf{e}^j jest wyznaczona jednoznacznie

$$\mathbf{e}^j = g^{jk} \mathbf{e}_k, \quad (\text{gdzie } g^{jk} = \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^k). \quad (2.13)$$

Współczynniki $g^{jk} \equiv \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^k$ rozkładu kobazy \mathbf{e}^j w bazie \mathbf{e}_k wyznaczamy z układu równań liniowych Cramer'a

$$g^{jk} g_{km} = \delta^j_m.$$

Kobaza \mathbf{e}^j jest bazą w \mathfrak{E}_3 . Można zatem wektory \mathbf{e}_j rozłożyć w kobazie \mathbf{e}^k

$$\mathbf{e}_j = g_{jk} \mathbf{e}^k. \quad (2.14)$$

Ze wzorów (2.13), (2.14) wynikają pewne własności macierzy g^{jk} i g_{mn} . Są to współczynniki rozkładu jednej bazy w drugiej. Służą one do podnoszenia i opuszczania indeksów.

Dowolny wektor $\mathbf{a} \in \mathfrak{E}_3$ można rozłożyć w bazie \mathbf{e}_k lub kobazie \mathbf{e}^j , a mianowicie

$$\mathbf{a} = \alpha^k \cdot \mathbf{e}_k = \alpha_j \cdot \mathbf{e}^j.$$

Po wykorzystaniu wzorów na rozkład jednej bazy w drugiej otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \alpha^k &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^k = \alpha_j g^{jk}, \\ \alpha_j &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = \alpha^k g_{kj}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Wybór bazy w \mathfrak{E}_3 jest dowolny. Jeżeli \mathbf{h}_α stanowi inną bazę od \mathbf{e}_i , to jeżeli

$$\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{h}^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

wówczas wektory \mathbf{h}^β są kobazą do \mathbf{h}_α . Każda z baz $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j, \mathbf{h}_\alpha, \mathbf{h}^\beta$ generuje całą przestrzeń. Wektor \mathbf{a} można wówczas rozłożyć w każdej z tych baz

$$\mathbf{a} = \tilde{\alpha}^\alpha \mathbf{h}_\alpha = \tilde{\alpha}_\beta \mathbf{h}^\beta = \alpha^k \mathbf{e}_k = \alpha_j \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{h}_\alpha = g^i_\alpha \mathbf{e}_i = g_{\alpha j} \mathbf{e}^j.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^\alpha) \mathbf{h}_\alpha = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}_\beta) \mathbf{h}^\beta = g_i^\alpha \mathbf{h}_\alpha = g_{i\beta} \mathbf{h}^\beta, \\ \mathbf{e}^j &= (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{h}_\alpha) \mathbf{h}^\alpha = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{h}^\beta) \mathbf{h}_\beta = g^j_\alpha \mathbf{h}^\alpha = g^{j\beta} \mathbf{h}_\beta. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Współczynniki rozkładu wektorów jednej bazy w drugiej są iloczynami skalarnymi odpowiednich wektorów bazowych, które można uznać za definicję tych obiektów liczbowych. Jeżeli bazy są ustalone, to ich iloczyny skalarne są niezmiennikami.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów \mathbf{a} i $\mathbf{b} \in \mathfrak{D}_3$ realizuje się następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \alpha^k \mathbf{e}_k \cdot \beta^m \mathbf{e}_m = \alpha^k \beta^m \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = \alpha^k \beta^m g_{km} = \alpha_j \mathbf{e}^j \cdot \beta_m \mathbf{e}^m = \alpha_j \beta_m \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^m = \alpha_j \beta_m g^{jm} = \\ &= \alpha_j \mathbf{e}^j \beta^m \mathbf{e}_m = \alpha_j \beta^m \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_m = \alpha_j \beta^m \delta^j_m = \alpha_j \beta^j = \alpha^j \beta_j. \end{aligned}$$

Przestrzeń euklidesową punktową \mathcal{E}_n o wymiarze n definiuje się jako zbiór elementów (punktów) takich, że każdej uporządkowanej parze punktów $A, B \in \mathcal{E}_n$ przyporządkowany jest jednoznacznie wektor $\overrightarrow{AB} \in \mathfrak{D}_n$. Przestrzeń euklidesowa punktowa \mathcal{E}_n związana jest z przestrzenią euklidesową wektorową \mathfrak{D}_n przez zadane odwzorowanie:

$$\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \rightarrow \mathfrak{D}_n;$$

$$(A, B) \in \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \mathfrak{D}_n.$$

Odwzorowanie to spełnia następujące aksjomaty:

$$\bigwedge_{A, B \in \mathcal{E}_n} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\bigwedge_{A, B, C \in \mathcal{E}_n} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\bigwedge_{O \in \mathcal{E}_n} \bigwedge_{X \in \mathcal{E}_n} \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_n} \overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$$

gdzie \mathbf{x} – promień wektor punktu X względem wybranego punktu O .

Obierając w \mathcal{E}_n punkt O można zdefiniować jedno-jednoznaczne przyporządkowanie

$${}_O\varphi : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathfrak{D}_n, \quad {}_O\varphi(X) = \overrightarrow{OX} = \mathbf{x} \quad (2.17)$$

między punktami z \mathcal{E}_n a wektorami z \mathfrak{D}_n .

Przestrzeń \mathcal{E}_n nie jest przestrzenią liniową. Można jednak przenieść do niej struktury przestrzeni wektorowej jako odpowiednie operacje na promieniach wodzących. Struktura ta zależy od wyboru punktu O .

Reperem w przestrzeni punktowej \mathcal{E}_n stowarzyszonej z \mathfrak{A}_n nazywamy każdą parę $(O; \mathbf{e}_i)$, gdzie $O \in \mathcal{E}_n$, $\mathbf{e}_i \in \mathfrak{A}_n$. Punkt O jest punktem zaczepienia repera, zaś wektory \mathbf{e}_i są bazą w \mathfrak{A}_n .

Baza \mathbf{e}_i jest ortonormalna, gdy $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Wektory bazy są wówczas wzajemnie ortogonalne i są wersorami.

W mechanice ośrodków ciągłych przyjmuje się, że przestrzeń fizyczna jest modelowana trójwymiarową punktową przestrzenią euklidesową \mathcal{E}_3 z reperem $(O; \mathbf{e}_i)$ ($i=1,2,3$).

Przestrzeń euklidesową punktową \mathcal{E}_3 definiuje się czasem jako zbiór $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, gdzie \mathcal{R} jest ciałem liczb rzeczywistych.

Wybierając w \mathfrak{A}_3 bazę ortonormalną \mathbf{i}_k ($\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl}$) otrzymujemy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie

$$\begin{aligned} {}_{i_k} \psi : \mathfrak{A}_3 &\rightarrow \mathcal{R}^3 \\ {}_{i_k} \psi(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_3). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Odwzorowanie

$$\Phi = {}_{i_k} \psi \circ {}_o \varphi : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{R}^3$$

jest izomorfizmem \mathcal{E}_3 w \mathcal{R}^3 zależnym od repera $(O; \mathbf{i}_k)$ względem struktur przeniesionych z \mathfrak{A}_3 , [30].

Rozdział 3. Tensory euklidesowe

3.1. Przestrzenie tensorowe

Podstawowym obiektem naszych zainteresowań z punktu potrzeb mechaniki ośrodków ciągłych są *tensory euklidesowe* [25], [30].

Tensory euklidesowe są elementami przestrzeni liniowych utworzonych z przestrzeni euklidesowych wektorowych. A zatem tworzywem tych przestrzeni są przestrzenie euklidesowe \mathfrak{E}_n .

W naszych rozważaniach ograniczamy się do przestrzeni euklidesowych \mathfrak{E}_3 – przestrzeni trójwymiarowych i przestrzeni tensorowych utworzonych z tych przestrzeni.

Jako jeden z przykładów odwzorowań przestrzeni liniowych był wprowadzony iloczyn tensorowy tych przestrzeni. Można zatem rozpatrywać również iloczyny tensorowe dwóch przestrzeni wektorowych euklidesowych $\mathfrak{E}_3^{(1)}$ i $\mathfrak{E}_3^{(2)}$.

Iloczynem tensorowym $\mathfrak{E}_3^{(1)} \otimes \mathfrak{E}_3^{(2)}$ nazywamy przestrzeń \mathcal{T}_2 o wymiarze $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$, którą otrzymujemy w wyniku odwzorowania

$$\begin{aligned} \otimes : \mathfrak{E}_3^{(1)} \times \mathfrak{E}_3^{(2)} &\rightarrow \mathfrak{E}_3^{(1)} \otimes \mathfrak{E}_3^{(2)} = \mathcal{T}_2 \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{E}_3^{(1)} \times \mathfrak{E}_3^{(2)} &\Rightarrow \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \in \mathfrak{E}_3^{(1)} \otimes \mathfrak{E}_3^{(2)} = \mathcal{T}_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Jest to *odwzorowanie biliniowe* (2.8).

Tensorem euklidesowym o walencji 2 (rzędu 2) nazywamy każdy element przestrzeni liniowej \mathcal{T}_2 ($\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$).

Tensory postaci $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ nazywamy *diadami* albo *tensorami rozkładalnymi*. Nie każdy tensor drugiego rzędu można przedstawić w postaci diady. Każdy natomiast jest kombinacją liniową diad. Wynika to z faktu, że w przestrzeniach wektorowych \mathfrak{E}_3 istnieją bazy. W każdej z mnożonych tensorowo przestrzeni $\mathfrak{E}_3^{(1)}$ i $\mathfrak{E}_3^{(2)}$ mogą być różne.

Niech \mathbf{e}_i i \mathbf{h}_α będą różnymi bazami odpowiednio w $\mathfrak{E}_3^{(1)}$ i $\mathfrak{E}_3^{(2)}$.

Układ dziewięciu diad postaci $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{h}_\alpha$ jest bazą w \mathcal{T}_2 . Z definicji przestrzeni \mathcal{T}_2 wynika wówczas, że

$$\bigwedge_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2} \bigwedge_{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{h}_\alpha} \bigvee_{T^{i\alpha} \in \mathbb{R}} \mathbf{T} = T^{i\alpha} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{h}_\alpha. \quad (3.2)$$

Na ogół przyjmuje się, że w każdej z przestrzeni $\mathfrak{E}_3^{(1)}$ i $\mathfrak{E}_3^{(2)}$ bazy są te same. Niech \mathbf{e}_i i \mathbf{e}^j ($\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta_i^j$) będą bazą i kobazą, wówczas cztery układy dziewięciu następujących diad:

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

są czterema różnymi bazami (**polibazami**) w \mathcal{T}_2 . Polibazy, w których występują wektory należące do jednej bazy i jej kobazy nazywamy **polibazami prostymi**. Oczywiście nie tylko polibazy są bazami w \mathcal{T}_2 . Dowolny układ dziewięciu tensorów liniowo niezależnych \mathbf{H}_k można przyjąć jako bazę w \mathcal{T}_2 . Można wówczas napisać $\mathbf{T} = T^k \mathbf{H}_k$ ($k=1,2,\dots,9$).

W polibazach prostych tensor $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$ można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci

$$\bigwedge_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2} \mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad (3.3)$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Układy dziewięciu liczb $T^{ij}, T^i_j, T_i^j, T_{ij}$ nazywamy **składowymi** lub **reprezentacją** tensora \mathbf{T} w odpowiedniej polibazie. Składowe te nie są niezależne. Ze wzorów na rozkład bazy w kobazie (2.13) i na odwrót (2.14) otrzymujemy, że na przykład

$$\mathbf{T}^{ij} = T_k^j \mathbf{g}^{ki} = T_{kl} \mathbf{g}^{ki} \mathbf{g}^{lj} = T^i_k \mathbf{g}^{kj},$$

$$\mathbf{T}_{ij} = T_i^k \mathbf{g}_{kj} = T^{kl} \mathbf{g}_{ki} \mathbf{g}_{lj} = T^k_j \mathbf{g}_{ki}. \quad (3.4)$$

Wybór bazy w przestrzeni euklidesowej jest dowolny. Jeżeli \mathbf{h}_α i \mathbf{h}^β są inną niż \mathbf{e}_i i \mathbf{e}^j bazą i kobazą w \mathfrak{E}_3 , to polibazami prostymi w \mathcal{T}_2 są wówczas układy diad:

$$\mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta, \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta, \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta, \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

z których każda generuje całą przestrzeń \mathcal{T}_2 . Tensor $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$ można zatem przedstawić również w postaci

$$\mathbf{T} = \tilde{T}^{\alpha\beta} \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta = \tilde{T}^\alpha{}_\beta \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta = \tilde{T}_\alpha{}^\beta \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta = \tilde{T}_{\alpha\beta} \mathbf{h}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta.$$

Łatwo pokazać, że między składowymi tensora \mathbf{T} w różnych polibazach (2.16) zachodzą zależności:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{\alpha\beta} &= (\mathbf{h}^\alpha \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{h}^\beta \cdot \mathbf{e}_j) T^{ij} = g^\alpha{}_i g^\beta{}_j T^{ij}, \\ \tilde{T}^\alpha{}_\beta &= (\mathbf{h}^\alpha \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{h}_\beta \cdot \mathbf{e}_j) T^{ij} = g^\alpha{}_i g_{\beta j} T^{ij}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

TENSOR METRYCZNY

Istotną rolę w rachunku tensorowym odgrywa tensor metryczny \mathbf{G} . Jest to tensor drugiego rzędu $\mathbf{G} \in \mathcal{T}_2$ o własnościach

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{h}_\alpha) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{h}^\alpha = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{h}^\beta) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{h}_\beta = (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = (\mathbf{h}^\alpha \cdot \mathbf{h}^\beta) \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}_\beta = \\ &= \delta^i{}_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \delta^\alpha{}_\beta \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i = \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}^\alpha = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}^3 = \mathbf{h}_1 \otimes \mathbf{h}^1 + \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}^2 + \mathbf{h}_3 \otimes \mathbf{h}^3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

W dowolnej polibazie prostej mieszanej, tzn. utworzonej z wektorów bazy i kobazy, tensor metryczny \mathbf{G} ma reprezentację w postaci delty Kronecker'a δ_{ij} (D.1).

Tworząc iloczyn tensorowe więcej niż dwóch przestrzeni euklidesowych otrzymujemy przestrzenie tensorowe tensorów wyższego rzędu.

Tensor euklidesowy rzędu p (o walencji p) nazywamy każdy element przestrzeni liniowej \mathcal{T}_p o wymiarze 3^p , która powstała z iloczynu tensorowego p przestrzeni euklidesowych \mathfrak{E}_3 , a mianowicie

$$\mathcal{T}_p = \mathfrak{E}_3^{(1)} \otimes \mathfrak{E}_3^{(2)} \otimes \mathfrak{E}_3^{(3)} \otimes \dots \otimes \mathfrak{E}_3^{(p)} = \bigotimes_{n=1}^p \mathfrak{E}_3^{(n)}.$$

Stąd wynika, że przestrzenie:

$\mathcal{T}_0 = \mathcal{R}$ o wymiarze $3^0 = 1$ jest przestrzenią liczb rzeczywistych,

$\mathcal{T}_1 = \mathfrak{D}_3$ o wymiarze $3^1 = 3$ jest przestrzenią euklidesową wektorową,

$\mathcal{T}_2 = \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3$ o wymiarze $3^2 = 9$ jest przestrzenią tensorów drugiego rzędu.

A zatem liczby można nazywać tensorami rzędu 0, a wektory tensorami rzędu 1.

Przyporządkowanie

$$\mathfrak{D}_3^{(1)} \times \mathfrak{D}_3^{(2)} \times \mathfrak{D}_3^{(3)} \times \dots \times \mathfrak{D}_3^{(p)} \rightarrow \mathcal{T}_p$$

jest przyporządkowaniem p – liniowym. Każdemu ciągowi p elementów $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$; $\mathbf{a}_v \in \mathfrak{D}_3^{(v)}$ przyporządkowujemy element

$$\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_p \in \mathcal{T}_p. \quad (3.7)$$

Tensory tej postaci nazywamy **tensorami rozkładalnymi**. Nie każdy element \mathcal{T}_p jest tensorem rozkładalnym. Drugi typ tensorów stanowią tensory będące kombinacją liniową tensorów rozkładalnych. Jeżeli w każdej przestrzeni $\mathfrak{D}_3^{(v)}$ weźmiemy taką samą bazę \mathbf{e}_i i kobazę \mathbf{e}^j ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$), to polibaza prosta postaci

$$\underbrace{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_m}_p$$

jest bazą w \mathcal{T}_p .

Zachodzi wówczas równość

$$\bigwedge_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_m = \bigvee_{T_i^j k \dots m} \mathbf{T} = T_i^j k \dots m \underbrace{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_m}_p.$$

Tensory są zatem jednością bazy (polibazy – stowarzyszenia bazowego) i składowych w tej bazie.

Dwa tensory \mathbf{A} i $\mathbf{B} \in T_p$ są sobie równe, jeżeli w tej samej polibazie mają takie same składowe, tzn., że $A^{i \dots k} = B^{i \dots k}$ w polibazie $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k$.

3.2. Działania na tensorach

Odwzorowania liniowe przestrzeni liniowych dotyczą również przestrzeni tensorowych.

Na tensorach o dowolnej walencji (dowolnego rzędu) można dokonywać odpowiednich operacji o ile nie są one sprzeczne z definicją tensora.

Działania na tensorach można rozpatrywać jako odwzorowania przestrzeni tensorowych.

a) Iloczyn tensorowy (iloczyn zewnętrzny) przestrzeni tensorowych

jest odwzorowaniem biliniowym

$$\otimes : T_p \times T_q \rightarrow T_p \otimes T_q = T_{p+q}, \quad (3.8)$$

które dla tensorów rozkładalnych (3.7) realizuje się w następujący sposób:

$$\left. \begin{array}{l} \otimes : \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \otimes \dots \otimes \mathbf{h} \in T_p \\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \dots \otimes \mathbf{g} \in T_q \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \otimes \dots \otimes \mathbf{h} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \dots \otimes \mathbf{g} \in T_{p+q}.$$

Jeżeli tensory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in T_p$ i $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in T_q$, to

$$(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) \otimes (\gamma \mathbf{C} + \xi \mathbf{D}) = \alpha \gamma \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \alpha \xi \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \beta \gamma \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \beta \xi \mathbf{B} \otimes \mathbf{D}.$$

Dla tensorów nierozkładalnych dowolnym tensorom $\mathbf{T} \in T_p$ i $\mathbf{P} \in T_q$, które w odpowiednich polibazach prostych mają postać

$$\mathbf{T} = T^{i \dots m}_{j \dots m} \underbrace{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^m}_p,$$

$$\mathbf{P} = P^{s \dots n}_{su \dots n} \underbrace{\mathbf{e}^s \otimes \mathbf{e}^u \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_n}_q.$$

operacja ich iloczynu tensorowego jest tensorem postaci

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{P} = \underbrace{T_{j\dots m}^i P_{su}^{\dots n}}_{\text{liczby}} \underbrace{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^s \otimes \mathbf{e}^u \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_n}_{p+q}.$$

Operacja iloczynu tensorowego nie jest przemienne. Na ogół $\mathbf{T} \otimes \mathbf{P} \neq \mathbf{P} \otimes \mathbf{T}$.

Przykłady:

1) Iloczyn tensorowy dwóch wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{D}_3$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i \otimes v_m \mathbf{e}^m = u^i v_m \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^m$$

jest tensorem drugiego rzędu zwanym diadą.

2) Iloczyn tensorowy tensora drugiego rzędu \mathbf{T} i wektora \mathbf{u}

$$\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2, \mathbf{u} \in \mathfrak{D}_3$$

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{u} = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes u^m \mathbf{e}_m = T_i^j u^m \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m$$

jest tensorem trzeciego rzędu.

Operacja iloczynu tensorowego realizuje się zatem przez dopisanie do siebie stowarzyszeń bazowych i wymnożeniu liczb – reprezentacji tych tensorów w wybranych polibazach.

b) Zwężenie tensora (kontrakcja)

Operacja zwężenia tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ jest odwzorowaniem liniowym $\mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_{p-2}$

$$\overset{(\mu, \nu)}{\sim} : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_{p-2}, \quad \overset{(\mu, \nu)}{\sim} = \overset{(\nu, \mu)}{\sim},$$

(3.9)

$$(\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p) \Rightarrow \left(\overset{(\mu, \nu)}{\tilde{\mathbf{T}}} \in \mathcal{T}_{p-2} \right).$$

Operacja zwężenia dla tensora rozkładalnego (3.7) realizuje się w następujący sposób:

$$\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{f}_\nu \otimes \dots \otimes \mathbf{d}_\mu \otimes \dots \otimes \mathbf{h}_p \xrightarrow{\overset{(\nu, \mu)}{\sim}} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{d}) \left(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{h}_{p-2} \right)$$

i polega na wymnożeniu skalarnym wektorów stojących na miejscach ν, μ w ciągu p wektorów. Jest to operacja przemienna, ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny. Jest to również operacja liniowa, ponieważ

$$(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}.$$

Dla tensorów nierozkładalnych, dla dowolnego tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T^{i \dots \mu \dots \nu \dots m} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_\mu \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^\nu \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^m \\ \tilde{\mathbf{T}} &= T^{i \dots \mu \dots \nu \dots m} (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^m = T^{i \dots \mu \dots \nu \dots m} \delta_\mu^\nu \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^m = \\ &= T^{i \dots \mu \dots \mu \dots m} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^m. \end{aligned}$$

A zatem dla dowolnego tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ danego w polibazie prostej operacji zwężenia po parze indeksów (μ, ν) dokonujemy wymnażając skalarnie wektory ze stowarzyszenia bazowego stojące na miejscach μ i ν . W reprezentacji tensora dokonujemy sumowania po parze powtarzających się wskaźników. Dla tensora o walencji $p > 2$ operacja zwężenia nie jest jednoznaczna i wymaga podania indeksów μ i ν po których dokonujemy zwężenia.

Dla tensorów rzędu p można dokonać $\binom{p}{2} = \frac{p!}{2!(p-2)!} = \frac{(p-1)p}{2}$ zwężeń.

Rząd otrzymanego tensora jest o 2 niższy od rzędu tensora zwężanego. Jeżeli wynik zwężenia jest tensorem o walencji nie mniejszej niż 2 można dokonać dalszych zwężeń.

Przykłady:

1) Dla tensora trzeciego rzędu $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_3$ operacji kontrakcji (zwężenia) można dokonać na trzy sposoby. W wyniku zwężenia otrzymuje się trzy różne wektory.

Jeżeli $\mathbf{T} = T^{i \dots j \dots k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k$, to w wyniku zwężenia otrzymujemy następujące trzy wektory:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 &= \tilde{\mathbf{T}} = T_i^k \mathbf{e}_k, \\ \mathbf{T}_2 &= \tilde{\mathbf{T}} = T_j^i \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{T}_3 &= \tilde{\mathbf{T}} = T_j^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) \otimes \mathbf{e}^j = T_j^i g_{ik} \mathbf{e}^j = T_{ji}^i \mathbf{e}^j.\end{aligned}$$

2) Zwężenie tensora drugiego rzędu $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$ jest określone jednoznacznie i daje skalar $\tilde{\mathbf{T}} \in \mathcal{R}$, który nazywamy śladem tensora $\tilde{\mathbf{T}} = tr(\mathbf{T})$, a mianowicie

$$tr(\mathbf{T}) = (T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = T_i^i = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3. \quad (3.10)$$

Tensory bezśladowe tzn. tensory, dla których $tr(\mathbf{T}) = 0$ nazywamy **dewiatorami**.

Następne operacje na tensorach są złożeniem działań iloczynu tensorowego i zwężenia.

c) Nasunięcie tensorów (iloczyn wewnętrzny tensorów)

Jest to odwzorowanie

$$\mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_{p+q-2}, \quad (3.11)$$

które jest złożeniem odwzorowań (3.8) i (3.9):

$$\otimes : \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_{p+q} \quad i \quad \overset{(\mu, \nu)}{\sim} : \mathcal{T}_{p+q} \rightarrow \mathcal{T}_{p+q-2}$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \Rightarrow \mathbf{A} \overset{(\mu, \nu)}{\otimes} \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{p+q-2} \quad 0 < \mu \leq p \quad p+1 \leq \nu \leq p+q.$$

Nasunięcie dwóch tensorów zwane również ich iloczynem wewnętrznym jest tensorem, który otrzymujemy dokonując zwężenia iloczynu zewnętrznego tych tensorów względem wskaźników, z których jeden należy do jednego tensora a drugi do drugiego. W wyniku nasunięcia tensorów $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_p$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_q$ można uzyskać $p \cdot q$ różnych tensorów o

walencji $p+q-2$ postaci $\mathbf{W} = \overset{(\mu, \nu)}{\sim} \mathbf{T} \otimes \mathbf{P}$.

Nasunięcie, w którym $\mu = p$, $\nu = p+1$ $\overset{(p, p+1)}{\widetilde{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}}} \equiv \mathbf{A} \mathbf{B}$ nazywamy **nasunięciem prostym**. Jest to nasunięcie dokonane po najbliższych indeksach. Na ogół $\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$, operacja nasunięcia prostego nie jest przemienna.

Nasunięciem pełnym dwóch tensorów nazywamy odwzorowanie: $\mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_{p-q}$ $p \geq q$. Jest to procedura q – krotnego nasunięcia tych tensorów według wzoru:

$$\begin{aligned} & (p+1-q, p+1)(p+2-q, p+2)\dots(p, p+q) \\ & \quad \quad \quad \widetilde{} \\ & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Gdy $p = q$ nasunięcie pełne $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ jest skalarzem, który nazywamy **iloczynem skalarnym** tych tensorów. Przestrzeń tensorów, po zdefiniowaniu iloczynu skalarnego, staje się przestrzenią euklidesową.

Przykłady:

1) Nasunięcie tensora drugiego rzędu $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$ i wektora $\mathbf{a} \in \mathfrak{D}_3$.

W wyniku ich nasunięcia otrzymujemy dwa różne wektory:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{(\nu)} &= \overset{(\nu, 3)}{\widetilde{\mathbf{T} \otimes \mathbf{a}}} \\ \mathbf{b}^{(1)} &= \overset{(1, 3)}{\widetilde{\mathbf{T} \otimes \mathbf{a}}}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \overset{(2, 3)}{\widetilde{\mathbf{T} \otimes \mathbf{a}}}. \end{aligned}$$

Nasunięcie $\overset{(2, 3)}{\widetilde{\mathbf{T} \otimes \mathbf{a}}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{a}$ jest jednocześnie prostym i pełnym nasunięciem tensora \mathbf{T} i wektora \mathbf{a} .

2) Nasunięcia dwóch diad $\mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ i $\mathbf{P} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ można dokonać na cztery sposoby:

$$\mathbf{W} = \overset{(\mu, \nu)}{\sim} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} \quad 1 \leq \mu \leq 2 \text{ i } 3 \leq \nu \leq 4$$

$$\mathbf{W}^{(1)} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} \otimes \mathbf{d}, \quad \mathbf{W}^{(2)} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}, \quad \mathbf{W}^{(3)} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}, \quad \mathbf{W}^{(4)} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}.$$

W wyniku nasunięcia prostego tych diad otrzymujemy tensor $\mathbf{W}^{(3)}$. Nasunięciem pełnym tych diad jest skalar $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})$.

TWIERDZENIE 3.1

Jeżeli odwzorowanie $\mathcal{L}: \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_q$ jest liniowe, to istnieje określony jednoznacznie tensor $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_{p+q}$ taki, że

$$\bigwedge_{\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p} \mathcal{L}(\mathbf{T}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{T} \in \mathcal{T}_q. \quad (3.13)$$

Z twierdzenia tego wynika, że liniowe odwzorowanie ($\mathcal{L}: \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_q$) można utożsamić z tensorem \mathbf{L} o walencji $p+q$. Odwzorowanie to realizuje się przez nasunięcie pełne (3.12) tensorów \mathbf{L} i $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$

$$\mathcal{L}(\mathbf{T}) = L^{ij \dots rk \dots m \dots n} T^{k \dots m \dots n} \underbrace{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^r}_{q}.$$

Każdy endomorfizm $\mathcal{L}: \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_p$ realizuje tensor \mathbf{L} o walencji parzystej ($2p$).

Przykłady:

- 1) Odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej w przestrzeń liczb rzeczywistych

$$\phi: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_0$$

$$\mathbf{a} \in \mathcal{T}_1 = \mathfrak{A}_3$$

$$\phi(\mathbf{a}) = \alpha \in \mathcal{T}_0 = \mathcal{R}$$

Jeżeli odwzorowanie jest liniowe, to

$$\bigvee_{\mathbf{v} \in \mathfrak{A}_3} \bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathfrak{A}_3} \phi(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \alpha^{(\nu)}.$$

Wektor \mathbf{v} dla każdego operatora ϕ jest określony jednoznacznie.

- 2) Odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej w przestrzeń wektorową

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{T}_1 &\rightarrow \mathcal{T}_1 \cong \mathfrak{D}_3 \rightarrow \mathfrak{D}_3 \\ \mathcal{L}(\mathbf{a}) &= \mathbf{b} \in \mathfrak{D}_3. \end{aligned}$$

Odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej \mathfrak{D}_3 w siebie nazywamy endomorfizmem albo **afinorem**. Istnieje tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$ określony jednoznacznie taki, że

$$\bigvee_{\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2} \bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathcal{T}_1} \mathcal{L}(\mathbf{a}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \in \mathcal{T}_1 = \mathfrak{D}_3.$$

Afinory $\mathfrak{D}_3 \xrightarrow{w} \mathfrak{D}_3$ oznaczamy przez \mathbf{A} .

Afinory – odwzorowania liniowe przestrzeni wektorowych \mathfrak{D}_3 będziemy utożsamiać z tensorami drugiego rzędu (tensorami o walencji 2). Afinor \mathbf{A} jest afinorem tożsamościowym, jeżeli $\bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathfrak{D}_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ wówczas $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ i nazywamy go tensorem jednostkowym $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Można pokazać, że tensor metryczny (3.6) jest afinorem tożsamościowym $\mathbf{G} = \mathbf{1}$.

TWIERDZENIE 3.2

Jeżeli odwzorowanie $B : \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_m$ jest biliniowe, to istnieje określony jednoznacznie tensor $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_{p+q+m}$ taki, że

$$B(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \in \mathcal{T}_m.$$

Jest to pełne nasunięcie (3.12) tensora \mathbf{L} i tensora $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

d) Transpozycja tensora

Operacja transpozycji tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ po parze indeksów jest operacją liniową odwzorowującą przestrzeń tensorów \mathcal{T}_p w siebie $\overset{(\mu, \nu)}{T} : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_p$.

Dla tensorów rozkładalnych operacja transpozycji realizuje się przez przestawienie wektorów stojących na miejscach μ i ν w ciągu p wektorów, a mianowicie

$$\left(\mathbf{c} \otimes \dots \otimes \underset{\mu}{\mathbf{a}} \otimes \dots \otimes \underset{\nu}{\mathbf{b}} \otimes \dots \otimes \underset{p}{\mathbf{d}} \right)^{\overset{(\mu, \nu)}{T}} = \left(\mathbf{c} \otimes \dots \otimes \underset{\mu}{\mathbf{b}} \otimes \dots \otimes \underset{\nu}{\mathbf{a}} \otimes \dots \otimes \underset{p}{\mathbf{d}} \right). \quad (3.14)$$

Wynik takiego odwzorowania nazywamy **izomerem**.

Operacji transpozycji dla tensora o walencji p można dokonać na

$$\binom{p}{2} = \frac{(p-1)p}{2} \text{ sposoby.}$$

Dla tensorów nierozkładalnych operacji transpozycji dokonujemy przez przestawienie w polibazie wektorów znajdujących się na miejscach μ i ν

$$\mathbf{T}^T = \left(T_i^{\mu \dots \nu \dots n} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_\mu \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^\nu \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_n \right)^T = \left(T_i^{\mu \dots \nu \dots n} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^\nu \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_\mu \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_n \right)$$

Dla tensora drugiego rzędu operacja transpozycji jest określona jednoznacznie

$$\mathbf{T}^T = \left(T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \right)^T = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Częścią symetryczną tensora \mathbf{T} po parze (μ, ν) nazywamy tensor

$$\mathbf{T}_S^{(\mu, \nu)} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} + \mathbf{T}^{(\mu, \nu)T}), \quad (3.15)$$

zaś jego częścią antysymetryczną tensor

$$\mathbf{T}_A^{(\mu, \nu)} = \frac{1}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^{(\mu, \nu)T}). \quad (3.16)$$

Z tych dwóch równości wynika, że

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S^{(\mu, \nu)} + \mathbf{T}_A^{(\mu, \nu)}. \quad (3.17)$$

Tensor \mathbf{T} nazywamy tensorem **symetrycznym** po parze (μ, ν) , gdy zachodzi równość

$$\mathbf{T}^{(\mu, \nu)T} = \mathbf{T} \quad (3.18)$$

i nazywamy go tensorem **antysymetrycznym** po tej parze, gdy

$$\mathbf{T}^{(\mu, \nu)T} = -\mathbf{T}. \quad (3.19)$$

Tensor symetryczny po każdej parze nazywamy tensorem **absolutnie symetrycznym**. Tensor antysymetryczny po każdej parze nazywamy tensorem **absolutnie antysymetrycznym**.

Działania liniowe zachowują własności symetrii i antysymetrii. Wynika stąd, że przestrzeń liniowa tensorów o tej samej walencji \mathcal{T}_p jest sumą prostą (2.9) podprzestrzeni liniowych tensorów symetrycznych i tensorów antysymetrycznych po parze (μ, ν)

$$\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_S^{(\mu, \nu)} \oplus \mathcal{T}_A^{(\mu, \nu)}.$$

3.3. Tensory drugiego rzędu

Tensory drugiego rzędu (o walencji 2) są elementami przestrzeni $\mathcal{T}_2 = \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3$ utworzonej z iloczynu tensorowego dwóch przestrzeni euklidesowych wektorowych. Odgrywają one zasadniczą rolę w zastosowaniach.

Przestrzeń tensorów drugiego rzędu jest przestrzenią liniową. Takie operacje wewnętrzne jak suma tensorów, jak również ich proste nasunięcie nie wyprowadzają poza ten zbiór.

Jeżeli $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$, to $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$ i $\mathbf{AB} \in \mathcal{T}_2$.

Tensory symetryczne są grupą ze względu na operację dodawania $(\mathcal{T}_2, +)$ (2.1).

Dla tensora \mathbf{A}

element neutralny grupy $\mathbf{0}$ – tensor zerowy,

element przeciwny grupy $-\mathbf{A}$.

Tensory drugiego rzędu należące do \mathcal{T}_2 nie są grupą ze względu na operację prostego nasunięcia, ponieważ nie dla każdego tensora $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$ istnieje tensor przeciwny $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$ taki, że

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{G} = \mathbf{1}; \quad \mathbf{1} \text{ - element neutralny grupy, gdy istnieje } \mathbf{A}^{-1}.$$

Zbiór tensorów

$$\mathcal{N} = \left\{ \mathbf{A} \in \mathcal{T}_2; \bigvee_{\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{T}_2}^1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \right\} \quad (3.20)$$

stanowi **grupę tensorów nieosobliwych**.

Jest to grupa ze względu na operację prostego nasunięcia. Jeśli $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$ i $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$, to $\mathbf{A} \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$. Tensorem neutralnym grupy jest tensor jednostkowy $\mathbf{1}$, zaś tensorem przeciwnym jest **tensor odwrotny** $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X}$.

Przestrzeń tensorów drugiego rzędu \mathcal{T}_2 jest przestrzenią 9-cio wymiarową. Przestrzeń macierzy kwadratowych \mathcal{M}_2 jest również przestrzenią 9-cio wymiarową. Przestrzenie te są izomorficzne, [30].

Ustalając w \mathcal{T}_2 pewną polibazę $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ (3.3) możemy odnieść wszystkie tensory do tej polibazy. Układ liczb A^i_j taki, że $\mathbf{A} = A^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$ jest uporządkowany przez dwa indeksy i może być utożsamiany z macierzą kwadratową (A^i_j) .

Odwzorowanie $\mathbf{A} \Leftrightarrow (A^i_j)$ jest izomorfizmem o własnościach:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &\Leftrightarrow (A^i_j) + (B^i_j), \\ \mathbf{A} \mathbf{B} &\Leftrightarrow (A^i_j)(B^j_k), \\ \mathbf{A}^T &\Leftrightarrow (A^i_j)^T = (A_j^i), \\ \overset{2}{\mathbf{A}} &\Leftrightarrow (A^i_j)(A^j_k). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Utworzony izomorfizm można wykorzystać do przeniesienia szeregu faktów z teorii macierzy do teorii tensorów o walencji 2. Odwzorowanie $\mathbf{A} \Leftrightarrow (A^i_j)$ zależy od wyboru polibazy.

TENSORY PODOBNE, MACIERZE PODOBNE

Dwie macierze (A^i_j) i (A^α_β) są podobne, jeżeli

$$\begin{aligned} (A^i_j) &= (g^i_\alpha)(A^\alpha_\beta)(g^\beta_j) \\ (g^\alpha_i)(g^i_\beta) &= \delta^\alpha_\beta, \quad \text{gdzie } g^i_\alpha = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{h}_\alpha, \quad g^\beta_j = \mathbf{h}^\beta \cdot \mathbf{e}_j, \end{aligned}$$

\mathbf{h}_α i \mathbf{h}^β inna baza i kobaza w \mathfrak{E}_3 .

Niezmienniczość względem relacji podobieństwa [41]

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} &= \text{tr}(\mathbf{A}) \equiv A^i_i = A^\alpha_\alpha, \\ \det \mathbf{A} &= \frac{1}{6} [2 \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{A}) - 3 \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{A}) \text{tr} \mathbf{A} + (\text{tr} \mathbf{A})^3] = \det(A^i_j) = \det(A^\alpha_\beta). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Potęga tensora drugiego rzędu jest zdefiniowana następująco:

$$\overset{2}{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{A} \quad \overset{n}{\mathbf{A}} = \overset{n-1}{\mathbf{A}} \mathbf{A} \quad \overset{n}{\mathbf{A}} \overset{m}{\mathbf{A}} = \overset{n+m}{\mathbf{A}} \quad \left(\overset{n}{\mathbf{A}} \right)^m = \overset{nm}{\mathbf{A}}. \quad (3.23)$$

TWIERDZENIE 3.3

Odwzorowanie liniowe $\mathfrak{E}_3 \xrightarrow{w} \mathfrak{E}_3$ jest zadane przez zadanie afinora \mathbf{A} na dowolnej bazie \mathbf{e}_i w \mathfrak{E}_3 . Wynika to z tzw. **fundamentalnej tożsamości dla dowolnego operatora \mathbf{L} i dowolnej bazy** [31].

Jeżeli \mathbf{e}_i i \mathbf{e}^j są bazą i kobazą w \mathfrak{E}_3 , to

$$\bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathfrak{E}_3} \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i, \quad \text{gdzie } a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i.$$

Stąd wynika, że

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = a^i \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i) \cdot \mathbf{a}$$

i ostatecznie otrzymujemy afinor \mathbf{A} w postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i. \quad (3.24)$$

Gdy $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ wówczas

$$\mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}^3.$$

Dla bazy ortonormalnej ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$) zachodzi równość

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

WARTOŚCI WŁASNE I WEKTORY WŁASNE

Dowolny wektor \mathbf{a} o długości a i wersorze kierunkowym \mathbf{v} pod wpływem afinora \mathbf{A} jest odwzorowany w inny wektor $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{A}^T$, który różni się od \mathbf{a} zarówno długością jak również kierunkiem. I tak, wektor \mathbf{a} doznaje wydłużenia λ_v

$$\lambda_v = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\mathbf{A}\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{a|\mathbf{A}\mathbf{v}|}{a} = |\mathbf{A}\mathbf{v}| = (\mathbf{v}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

oraz zmienia swój kierunek

$$\cos \varphi \equiv \cos(\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}||\mathbf{A}\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{v}}{\lambda_v}. \quad (3.26)$$

Wektor $\mathbf{A}^{(v)} \equiv \mathbf{A}\mathbf{v}$ nazywamy *składową wektorową* tensora \mathbf{A} dla kierunku \mathbf{v} , zaś skalar $A^{(vv)} \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{v}$ nazywamy *składową normalną* tensora \mathbf{A} dla kierunku \mathbf{v} . Jest to rzut wektora $\mathbf{A}^{(v)}$ na kierunek \mathbf{v} . Jeżeli wersor $\boldsymbol{\mu}$ jest ortogonalny do \mathbf{v} ($\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{v} = 0$), to rzut wektora $\mathbf{A}^{(v)}$ na kierunek $\boldsymbol{\mu}$ - $A^{(v\boldsymbol{\mu})} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\mu}$ nazywamy *składową styczną* tensora \mathbf{A} dla pary kierunków $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$. Na ogół

$$\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\mathbf{v} \neq \mathbf{v}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}.$$

Definicja

Każdy wektor $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ spełniający równanie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = A\mathbf{a}$, $A \in \mathcal{R}$ nazywamy *wektorem własnym* tensora \mathbf{A} odpowiadającym liczbie A ; liczbę A nazywamy *wartością własną* tensora \mathbf{A} .

Wektor własny \mathbf{a} pod wpływem afinora \mathbf{A} nie zmienia swojej orientacji. Z (3.26) wynika wówczas, że $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ i $\lambda_v = \mathbf{v}\mathbf{A}\mathbf{v}$.

Z równości $(\mathbf{A} - A\mathbf{1})\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (równanie jednorodne) wynika, że jeżeli mają istnieć niezerowe wektory \mathbf{a} spełniające tę równość, to tensor $(\mathbf{A} - A\mathbf{1})$ musi być osobliwy, ($\det(\mathbf{A} - A\mathbf{1}) = 0$). Oznacza to, że zeruje się wyznacznik macierzy

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - A & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 - A & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 - A \end{vmatrix} = 0 \quad (3.27)$$

Przyrównując do zera wyznacznik otrzymujemy równanie trzeciego stopnia na wartość własną A . Wartości własne tensora \mathbf{A} pokrywają się zatem z pierwiastkami rzeczywistymi równania charakterystycznego

$$A^3 - I_A A^2 - II_A A - III_A = 0, \quad (3.28)$$

gdzie (3.22)

$$I_A = tr(\mathbf{A}), \quad II_A = \frac{1}{2} \left(tr(\mathbf{A}^2) - (tr(\mathbf{A}))^2 \right), \quad III_A = \det(\mathbf{A}).$$

Z algebry liniowej wynika, że równanie trzeciego stopnia posiada co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty, [23]. Rzeczywistym wartościom własnym odpowiadają wówczas rzeczywiste wektory własne. Wyznaczamy je z następującego układu równań jednorodnych

$$\begin{aligned} (A_1^1 - A)v_1 + A_1^2 v_2 + A_1^3 v_3 &= 0, \\ A_2^1 v_1 + (A_2^2 - A)v_2 + A_2^3 v_3 &= 0, \\ A_3^1 v_1 + A_3^2 v_2 + (A_3^3 - A)v_3 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie przyjęto, że $\mathbf{a} = a\mathbf{v}$. Należy pamiętać, że $|\mathbf{v}| = 1$.

Z fundamentalnej tożsamości (3.24) wynika, że jeżeli

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = A^1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = A^2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_3 = A^3 \mathbf{e}_3,$$

to otrzymujemy tensora \mathbf{A} w postaci

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + A^2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 + A^3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}^3. \quad (3.29)$$

Macierz reprezentacji tensora ma wówczas postać diagonalną, ponieważ wektory bazy są wektorami własnymi dla tensora \mathbf{A} .

Postać (3.29) tensora \mathbf{A} nazywamy jego *rozkładem spektralnym*.

Podprzestrzeń $\mathcal{P} \subset \mathfrak{D}_3$ nazywamy **podprzestrzenią inwariantną** tensora \mathbf{A} , jeżeli

$$\bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathcal{P}} \mathbf{A}\mathbf{a} \in \mathcal{P}.$$

Nie należy sądzić, że podprzestrzeń inwariantna składa się z wektorów własnych. Podprzestrzeń \mathcal{P} może nie zawierać żadnego wektora własnego.

Podprzestrzenią własną tensora \mathbf{A} dla wartości własnej A nazywamy zbiór rozwiązań równania

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{a} &= A\mathbf{a}, \\ N_A &= \{\mathbf{a} \in \mathfrak{D}_3; \mathbf{A}\mathbf{a} = A\mathbf{a}\}. \end{aligned}$$

Jest to zbiór wektorów własnych tensora \mathbf{A} odpowiadających wartości własnej A uzupełniony wektorem własnym zerowym. Podprzestrzeń własna tensora \mathbf{A} jest podprzestrzenią inwariantną tensora \mathbf{A} .

TWIERDZENIE 3.4

Wektory własne tensora \mathbf{A} odpowiadające wartości własnej λ są wektorami własnymi dowolnego wielomianu od \mathbf{A} . Jeżeli

$$\varphi(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{A} + \dots + \alpha_m \mathbf{A}^m, \quad \alpha_v \in R \quad (3.30)$$

to odpowiadająca jemu wartość własna spełnia równość

$$\varphi(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_m \lambda^m.$$

Dla tensora nieosobliwego potęgi mogą być ujemne.

Dowód tego twierdzenia wynika z faktu, że wektor własny tensora jest wektorem własnym dowolnej jego potęgi, a mianowicie

$$\mathbf{A}^n \mathbf{a} = \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{A}\mathbf{a} = A \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{a} = \dots = A^n \mathbf{a}. \quad (3.31)$$

Dla $n=2$ wzór (3.31) przyjmuje postać

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{a} = \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{A}(\mathbf{A} \mathbf{a}) = \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{a} = A(\mathbf{A} \mathbf{a}) = A^2 \mathbf{a}.$$

Ponadto, wartość własna dla dowolnej potęgi tensora jest taką samą potęgą wartości własnej tensora.

Z punktu widzenia potrzeb mechaniki ośrodków ciągłych interesują nas tensory drugiego rzędu, które spełniają równość

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \Rightarrow \mathbf{a} \mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{b} \mathbf{A} \mathbf{a}. \quad (3.32)$$

Są to tensory symetryczne.

TWIERDZENIE 3.5

Dla każdego tensora symetrycznego drugiego rzędu równanie charakterystyczne posiada trzy pierwiastki rzeczywiste. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

Symetria tensora jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym. Mogą istnieć niesymetryczne tensory o rzeczywistych wartościach własnych, n. p.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny tego tensora $(A - \alpha)^3 = 0$ ma potrójny pierwiastek rzeczywisty $A = \alpha$.

Jeżeli tensor \mathbf{A} jest symetryczny i ma potrójny pierwiastek, wówczas jest tensorem postaci $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{1}$, tzn.

$$(A_{ij}) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takie tensory nazywamy *tensorami kulistymi*.

Każdy tensor symetryczny można przedstawić w postaci sumy tensora kulistego \mathbf{P} i dewiatora \mathbf{D} ($tr \mathbf{D} = 0$)

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} + \mathbf{D},$$

gdzie $\mathbf{P} = \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{A})\mathbf{1}$, ($\text{tr}\mathbf{P} = \text{tr}\mathbf{A}$, ponieważ $\text{tr}\mathbf{1} = 3$) i $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{P}$. Rozkład ten jest jednoznaczny.

TWIERDZENIE 3.6

Twierdzenie Cayley'a-Hamiltona

Każdy tensor drugiego rzędu jest pierwiastkiem swego wielomianu charakterystycznego

$$\mathbf{A}^3 = I_A \mathbf{A}^2 + II_A \mathbf{A} + III_A \mathbf{1}. \quad (3.33)$$

Dowód tego twierdzenia wynika z wielomianu charakterystycznego (3.28) i z twierdzenia 3.4.

PROJEKTORY

Ważną i prostą klasę afinorów stanowią **projektory**.

Niech przestrzeń $\mathfrak{E}_3 = M \oplus N$ jest sumą prostą dwóch podprzestrzeni M, N , wówczas

$$\bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathfrak{E}_3} \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2; \quad \mathbf{a}_1 \in M, \quad \mathbf{a}_2 \in N.$$

Tensor \mathbf{P}_1 drugiego rzędu jest projektorem na M równoległym do N , jeżeli

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{a} = \mathbf{a}_1.$$

Jeżeli $\mathbf{a} \in M$, to projektor działa jak operator tożsamościowy $\mathbf{P}_1 \mathbf{a} = \mathbf{a}$. Dla $\mathbf{a} \notin M$ $\mathbf{P}_1 \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Postać projektora zależy od wymiaru podprzestrzeni M . Jeżeli M jest podprzestrzenią jednowymiarową, to projektor ma postać

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1. \quad (3.34)$$

Zachodzi wówczas następująca równość

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1) \mathbf{a} = (\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{a}) \mathbf{e}_1 = a^1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1.$$

Dla podprzestrzeni M o wymiarze 2 wybieramy dowolną bazę w M , n. p. \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 . Wówczas

$$\mathbf{a}_1 = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_2 = a^3 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{P}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{P}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Stąd wynika, że

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1) + (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2). \quad (3.35)$$

Definicja

Projektor \mathbf{P}_1 nazywamy ortogonalnym, gdy $M \perp N$ tzn.

$$\bigwedge_{\mathbf{a} \in \mathfrak{E}_3} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0.$$

Każdy projektor można wówczas zapisać w postaci:

$$\mathbf{P} = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{n}_k \cdot \mathbf{n}_l = \delta_{kl}$$

lub

$$\mathbf{P} = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_k - \text{ baza ortonormalna.}$$

Każdy projektor ortogonalny jest symetryczny.

TWIERDZENIE 3.7

Twierdzenie o *rozkładzie spektralnym (widmowym)* tensora symetrycznego drugiego rzędu, afinora \mathbf{A} można sformułować w następujący sposób.

Każdy tensor symetryczny $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2^S$ daje się przedstawić w postaci kombinacji liniowej projektorów ortogonalnych, wzajemnie ortogonalnych

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{P}_1 + \dots + A_r \mathbf{P}_r, \quad r \leq 3.$$

Dla jednokrotnych wartości własnych przestrzenie wektorów własnych są jednowymiarowe i wektory własne określone są z dokładnością do znaku ($r=3$). Projektory ortogonalne są wówczas postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \mathbf{v}^I \otimes \mathbf{v}^I, & \mathbf{A} \mathbf{v}^I &= A_I \mathbf{v}^I; \\ \mathbf{P}_2 &= \mathbf{v}^{II} \otimes \mathbf{v}^{II}, & \mathbf{A} \mathbf{v}^{II} &= A_{II} \mathbf{v}^{II}; \\ \mathbf{P}_3 &= \mathbf{v}^{III} \otimes \mathbf{v}^{III}, & \mathbf{A} \mathbf{v}^{III} &= A_{III} \mathbf{v}^{III} \end{aligned}$$

i rozkład spektralny ma postać

$$\mathbf{A} = A_I \mathbf{v}^I \otimes \mathbf{v}^I + A_{II} \mathbf{v}^{II} \otimes \mathbf{v}^{II} + A_{III} \mathbf{v}^{III} \otimes \mathbf{v}^{III}. \quad (3.36)$$

Dla podwójnej wartości własnej podprzestrzeń własna jest dwuwymiarowa, ponieważ dla tensorów symetrycznych krotność algebraiczna jest równa krotności geometrycznej.

Jeżeli $A_I = A_{II} \neq A_{III}$ wówczas

$$\mathbf{A} = A_I \mathbf{P}_1 + A_{III} \mathbf{v}^{III} \otimes \mathbf{v}^{III}, \quad (3.37)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{v}^I \otimes \mathbf{v}^I + \mathbf{v}^{II} \otimes \mathbf{v}^{II}.$$

Wektory własne \mathbf{v}^I i \mathbf{v}^{II} stanowią wówczas dowolną bazę ortonormalną w dwuwymiarowej podprzestrzeni własnej \mathcal{P}_1 .

Dla potrójnej wartości własnej, gdy $A_I = A_{II} = A_{III} = A$

$$\mathbf{A} = A \mathbf{1}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{1},$$

gdzie

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{v}^I \otimes \mathbf{v}^I + \mathbf{v}^{II} \otimes \mathbf{v}^{II} + \mathbf{v}^{III} \otimes \mathbf{v}^{III} = \boldsymbol{\mu}^I \otimes \boldsymbol{\mu}^I + \boldsymbol{\mu}^{II} \otimes \boldsymbol{\mu}^{II} + \boldsymbol{\mu}^{III} \otimes \boldsymbol{\mu}^{III}.$$

Dowolna baza ortonormalna jest bazą wektorów własnych.

Rozdział 4. Automorfizmy przestrzeni tensorowych

4.1. Tensory ortogonalne

Automorfizmami przestrzeni tensorowej \mathcal{T}_p nazywamy wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe tej przestrzeni na siebie: $\mathcal{T}_p \xrightarrow{na} \mathcal{T}_p$. Przestrzeń \mathcal{T}_p jest przestrzenią otrzymaną z iloczynu tensorowego p przestrzeni wektorowych \mathfrak{E}_3

$$\mathcal{T}_p = \bigotimes_1^p \mathfrak{E}_3 = \mathfrak{E}_3 \otimes \mathfrak{E}_3 \otimes \dots \otimes \mathfrak{E}_3.$$

Automorfizmy $\mathcal{T}_p \xrightarrow{na} \mathcal{T}_p$ muszą zachować strukturę \mathcal{T}_p . Będą to zatem automorfizmy generowane przez automorfizmy przestrzeni $\mathfrak{E}_3 \xrightarrow{na} \mathfrak{E}_3$.

Automorfizmami $\mathfrak{E}_3 \xrightarrow{na} \mathfrak{E}_3$ nazywamy *afinory odwracalne*, które zachowują strukturę przestrzeni euklidesowej wektorowej tzn. iloczyn skalarny

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{1}. \quad (4.1)$$

Afinory o tej własności nazywamy afinorami *ortogonalnymi*. Będziemy je oznaczać przez \mathcal{Q} . Tensory ortogonalne

$$\theta = \{ \mathcal{Q} \in \mathcal{T}_2; \mathcal{Q} \mathcal{Q}^T = \mathbf{1} \}; \quad \det \mathcal{Q} = \pm 1, \quad (\det(\mathcal{Q}))^2 = 1. \quad (4.2)$$

stanowią grupę ze względu na proste nasunięcie.

Tensory o własności $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ nazywamy tensorami *unimodularnymi*

$$U = \{ \mathbf{A} \in \mathcal{T}_2; \det(\mathbf{A}) = \pm 1 \}; \quad U \subset \theta \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{T}_2.$$

TWIERDZENIE 4.1

Każdy tensor ortogonalny można przedstawić w postaci

$$\mathcal{Q} = \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{n}_3. \quad (4.3)$$

Wynika to z fundamentalnej tożsamości (3.24) $\mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i$ dla bazy ortonormalnej \mathbf{n}_i ($\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij}$) i afinora \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \text{gdzie } \mathbf{Q} \mathbf{n}_i = \mathbf{m}_i.$$

Każdy wektor \mathbf{a}

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{n}_1 + a_2 \mathbf{n}_2 + a_3 \mathbf{n}_3$$

jest odwzorowany w wektor $\mathbf{Q} \mathbf{a}$ o postaci

$$\mathbf{Q} \mathbf{a} = a_1 \mathbf{Q} \mathbf{n}_1 + a_2 \mathbf{Q} \mathbf{n}_2 + a_3 \mathbf{Q} \mathbf{n}_3 = a_1 \mathbf{m}_1 + a_2 \mathbf{m}_2 + a_3 \mathbf{m}_3.$$

TWIERDZENIE 4.2

Dla każdego tensora $\mathbf{Q} \in \theta$ (ortogonalnego) istnieje taka baza ortonormalna \mathbf{n}_i i taki kąt φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, że

$$\mathbf{Q} = \det(\mathbf{Q}) \{ \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \cos \varphi (\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3) + \sin \varphi (-\mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_2) \}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Q} \cong \det(\mathbf{Q}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Gdy $\det(\mathbf{Q}) = 1$, to $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}$ (\mathcal{R} – właściwa grupa ortogonalna lub grupa obrotów)

$$\mathcal{R} \equiv \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{T}_2; \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}, \det(\mathbf{Q}) = 1 \}. \quad (4.5)$$

TWIERDZENIE 4.3

Właściwą grupą ortogonalną \mathcal{R} nazywamy podgrupę pełnej grupy ortogonalnej θ składającą się z tensorów postaci

$$\mathbf{R}_k^\varphi = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \varphi (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \sin \varphi (\mathbf{n} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathbf{n}), \quad (4.6)$$

gdzie $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{n}$, – baza ortonormalna; \mathbf{k} – wektor obrotu; φ – kąt obrotu; \mathbf{R}_k^φ – tensor obrotu. Wersor \mathbf{k} jest określony z dokładnością do znaku ± 1 ; \mathbf{l}, \mathbf{n} – dowolne wersory tworzące z \mathbf{k} bazę ortonormalną prawoskrętną.

Podzbiór $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{R}$ składający się z tensorów o tym samym wersorze \mathbf{k} stanowi podgrupę grupy \mathcal{R}

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_k^\varphi \mathbf{R}_k^\psi &= \mathbf{R}_k^{\varphi+\psi}, \\ \mathbf{R}_k^\varphi &^{-1} = \mathbf{R}_k^{-\varphi}.\end{aligned}$$

Niech n jest liczbą całkowitą. Podzbiór: $\mathbf{1}, \mathbf{R}_k^{\frac{2\pi}{n}}, \mathbf{R}_k^{\frac{2 \cdot 2\pi}{n}}, \mathbf{R}_k^{\frac{(n-1)2\pi}{n}}$ stanowi podgrupę skończoną grupy \mathcal{R}_k . Jest to grupa cykliczna o generatorze $\mathbf{R}_k^{\frac{2\pi}{n}}$ rzędu n , $\mathcal{R}_k^n \subset \mathcal{R}_k$.

Tensory \mathbf{Q} dla których $\det(\mathbf{Q}) = -1$ nazywamy *tensorami odbicia M*. Zbiór tensorów ortogonalnych \mathcal{M} takich, że

$$\mathcal{M} \equiv \{\mathbf{Q} \in \theta; \det(\mathbf{Q}) = -1\} \quad (4.7)$$

nie tworzy podgrupy grupy θ . Mamy wówczas równość $\theta = \mathcal{R} \cup \mathcal{M}$ (suma zbiorów).

Oznaczmy przez \mathbf{I} *inwersję*, tzn. odwzorowanie takie, że $\mathbf{I}\mathbf{a} = -\mathbf{a}$, $\mathbf{I} = -\mathbf{1}$. Z ogólnej postaci tensora ortogonalnego wynika, że tensor odbicia jest postaci:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\mathbf{R}_k^\varphi.$$

Tensor \mathbf{I}_k zdefiniowany jako $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}\mathbf{R}_k^\pi$ definiuje *odbicie lustrzane* względem płaszczyzny prostopadłej do \mathbf{k} . Wektorowi \mathbf{a} postaci

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{k} + a_2 \mathbf{l} + a_3 \mathbf{n},$$

\mathbf{I}_k przyporządkowuje wektor

$$\mathbf{I}_k \mathbf{a} = \mathbf{I}\mathbf{R}_k^\pi \mathbf{a} = \mathbf{R}_k^\pi(-\mathbf{a}) = \mathbf{R}_k^\pi(-a_1 \mathbf{k} - a_2 \mathbf{l} - a_3 \mathbf{n}) = -a_1 \mathbf{k} + a_2 \mathbf{l} + a_3 \mathbf{n}, \quad (4.8)$$

ponieważ $\mathbf{R}_k^\pi \mathbf{l} = -\mathbf{l}$, $\mathbf{R}_k^\pi \mathbf{n} = -\mathbf{n}$. Tensor $\mathbf{M} = \mathbf{I}\mathbf{R}_k^\varphi = \mathbf{I}_k \mathbf{R}_k^{\varphi-\pi}$ jest kompozycją obrotu wokół \mathbf{k} o kąt $\varphi - \pi$ i odbicia lustrzanego względem

płaszczyzny ortogonalnej do \mathbf{k} . Łączny wynik nazywamy **obrotom lustrzanym** wokół \mathbf{k} o kąt φ .

W mechanice ośrodków ciągłych istotną rolę przy opisie deformacji ośrodka odgrywa rozkład tensora drugiego rzędu nieosobliwego na tensor ortogonalny i tensor symetryczny. Jest to rozkład **biegunowy (polarny)** tensora

TWIERDZENIE 4.4

Każdy tensor drugiego rzędu \mathbf{A} nieosobliwy ($\det \mathbf{A} \neq 0$) można w sposób jednoznaczny przedstawić w postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{Q}, \quad (4.9)$$

gdzie tensory drugiego rzędu \mathbf{U} i \mathbf{V} są tensorami symetrycznymi i dodatnio określonymi, zaś tensor \mathbf{Q} jest tensorem ortogonalnym.

Z rozkładu (4.9) wynika, że

$$\overset{2}{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad \overset{2}{\mathbf{V}} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T. \quad (4.10)$$

Tensory te są dodatnio określone, ponieważ dla dowolnego \mathbf{a} spełniony jest warunek

$$\mathbf{a} \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{a} = (\mathbf{A} \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{a}) \geq 0.$$

Tensor \mathbf{Q} wyznaczamy z równania

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \overset{-1}{\mathbf{U}} = \overset{-1}{\mathbf{V}} \mathbf{A}. \quad (4.11)$$

Tensory \mathbf{U} i \mathbf{V} są tensorami wzajemnie obróconymi. Między nimi zachodzą następujące zależności:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q} \mathbf{U} \mathbf{Q}^T \quad \text{i} \quad \mathbf{U} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}.$$

Jeżeli tensor \mathbf{A} jest tensorem osobliwym, wówczas z równości

$$\det \mathbf{A} = \pm \det \mathbf{U} = \pm \det \mathbf{V}$$

wynika, że tensory \mathbf{U} i \mathbf{V} są również tensorami osobliwymi i tensor \mathbf{Q} (4.11) nie jest wyznaczony jednoznacznie.

Tensor \mathbf{U} jest tensorem symetrycznym, a zatem można go przedstawić w postaci jego rozkładu spektralnego (3.36)

$$\mathbf{U} = U_I \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + U_{II} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + U_{III} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III}.$$

Z rozkładu biegunowego (4.9) wynika wówczas, że

$$\mathbf{A} = U_I \mathbf{Q} \mathbf{n}_I \otimes \mathbf{n}_I + U_{II} \mathbf{Q} \mathbf{n}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + U_{III} \mathbf{Q} \mathbf{n}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III} = U_I \mathbf{m}_I \otimes \mathbf{n}_I + U_{II} \mathbf{m}_{II} \otimes \mathbf{n}_{II} + U_{III} \mathbf{m}_{III} \otimes \mathbf{n}_{III},$$

gdzie $\mathbf{m}_K = \mathbf{Q} \mathbf{n}_K$.

Z twierdzenia o rozkładzie biegunowym korzystamy w mechanice ośrodków ciągłych przy rozkładzie tensora gradientu deformacji \mathbf{F} .

4.2. Automorfizmy przestrzeni tensorowych

Automorfizmy \mathbf{Q} przestrzeni \mathfrak{E}_3 , $\mathbf{Q} \in \theta$, gdzie θ jest pełną grupą ortogonalną, generują automorfizmy przestrzeni tensorów o walencji $p - \mathcal{T}_p$.

Z faktu, że $\mathcal{T}_p = \underbrace{\mathfrak{E}_3 \otimes \mathfrak{E}_3 \otimes \dots \otimes \mathfrak{E}_3}_p = \bigotimes_1^p \mathfrak{E}_3$, wynika, że reprezentacja grupy θ w przestrzeni \mathcal{T}_p jest odwzorowanie

$$\bigotimes_1^p \mathbf{Q} \equiv (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}). \quad (4.12)$$

Automorfizm \mathcal{T}_p powinien zachowywać relację tensorów rozkładalnych.

TWIERDZENIE 4.5

Odwzorowanie liniowe przestrzeni \mathcal{T}_p na siebie określone na tensorach rozkładalnych jako odwzorowanie

$$\bigotimes_1^p \mathbf{Q} : \mathbf{c} \otimes \dots \otimes \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{Q} \mathbf{c} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \mathbf{d},$$

gdzie \mathbf{Q} jest afinem ortogonalnym, jest automorfizmem \mathcal{T}_p .

A zatem

$$\bigotimes_1^p \mathbf{Q} * (\mathbf{c} \otimes \dots \otimes \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{Q} \mathbf{c} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \mathbf{a} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \mathbf{d}. \quad (4.13)$$

Często opuszcza się przed \mathbf{Q} wyrażenie \bigotimes_1^p .

Dla tensorów nierozkładalnych, gdy $\mathbf{T} = T^{ij\dots k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^k$, tensor \mathbf{T} po zastosowaniu automorfizmu przechodzi w nowy tensor \mathbf{B} postaci

$$\mathbf{B} = \bigotimes_1^p \mathbf{Q} * \mathbf{T} = T^{ij\dots k} \mathbf{Q} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{Q} \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{Q} \mathbf{e}^k = T^{ij\dots k} \mathbf{e}_i^* \otimes \mathbf{e}_j^* \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{k*}, \quad (4.14)$$

gdzie $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{Q} \mathbf{e}_i$ nowa baza w \mathfrak{E}_3 . Tensory \mathbf{T} i \mathbf{B} mają te same składowe ale w innych (obróconych) polibazach.

Zbiór $\mathcal{P}_p \subset \mathcal{T}_p$ nazywamy przestrzenią tensorową, jeżeli jest podprzestrzenią liniową \mathcal{T}_p stateczną względem automorfizmów, tzn.

$$\bigwedge_{\mathbf{A} \in \mathcal{P}_p} \bigotimes_1^p \mathbf{Q} * \mathbf{A} \in \mathcal{P}_p,$$

gdzie \mathbf{Q} jest dowolnym automorfizmem \mathfrak{E}_3 .

GRUPA AUTOMORFIZMÓW \mathcal{T}_p – (grupa permutacji σ_p)

Definicja

Permutacją tensora \mathbf{T} nazywamy odwzorowanie

$$\sigma : \mathcal{T}_p \xrightarrow{na} \mathcal{T}_p, \quad p \geq 2$$

określone dla tensorów rozkładalnych przepisem [30]

$$\sigma \times (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_p) \equiv \mathbf{a}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{a}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_{\sigma(p)}, \quad (4.15)$$

gdzie dla permutacji σ przyjęto następujące oznaczenia: $\sigma = \langle i, k, \dots, q \rangle$ oznacza, że

$$\sigma(1) = i, \quad \sigma(2) = k, \dots, \sigma(p) = q.$$

Przykład:

Permutacja $\sigma = \langle 2, 4, 3, 1 \rangle$ tensora $\mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{d}$ daje tensor $\sigma \times (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{d}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{d} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$.

Zbiór wszystkich permutacji T_p na sobie jest grupą ze względu na działanie kompozycji. Grupę tę oznaczamy przez σ_p . Zawiera ona $p!$ permutacji.

Dla tensorów dowolnej postaci, gdy $\mathbf{T} = T^{ij \dots k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^k$ permutacja \mathbf{T} jest określona na polibazie

$$\sigma \times \mathbf{T} = T^{ij \dots k} \sigma \times (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^k). \quad (4.16)$$

Kompozycję permutacji σ_i i σ_μ oznaczamy przez $\sigma_{i\mu} = \sigma_i \times \sigma_\mu \times (\dots)$. Permutacja odwrotna σ^{-1} ; $\sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = e$, gdzie e - permutacja tożsamościowa.

Przykład:

$$\sigma_i = \langle 2, 1, 4, 3 \rangle, \sigma_\mu = \langle 1, 3, 4, 2 \rangle, \sigma_{i\mu} = \langle 2, 4, 3, 1 \rangle.$$

Transpozycję $[i, j]$ $1 \leq i < j \leq p$ nazywamy permutacją $\sigma \in \sigma_p$ taką, że

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i, \quad \sigma(k) = k; \quad k \neq i, k \neq j.$$

Transpozycja jest szczególnym przypadkiem permutacji cyklicznej

$$\sigma = [i, j, k, \dots, s]$$

$$[i, j, k, \dots, s] = [j, k, \dots, s, i] = [k, \dots, s, i, j] = \dots$$

Permutacja cykliczna rodzi cykliczną podgrupę grupy σ_p .

4.3. Grupy symetrii tensorów

Automorfizmy \mathcal{T}_p są generowane albo przez afinory ortogonalne $\mathbf{Q} \in \theta \subset \mathcal{T}_2$ (4.12) albo przez permutacje $\sigma \in \sigma_p$ (4.15). W wyniku tych odwzorowań $\mathcal{T}_p \xrightarrow{na} \mathcal{T}_p$ dowolny tensor $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ jest odwzorowany w inny tensor \mathbf{T}^* . Na ogół $\mathbf{T} \neq \mathbf{T}^*$.

GRUPA SYMETRII TENSORA WZGLĘDEM $\mathbf{Q} \in \theta$

Tensor \mathbf{T} w wyniku automorfizmu rodzonego przez \mathbf{Q} przechodzi w tensor

$$\mathbf{T}^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \otimes \\ p \end{smallmatrix} \mathbf{Q} \right) * \mathbf{T}. \quad (4.17)$$

Na ogół dla $\mathbf{Q} \neq \mathbf{1}$

$$\mathbf{T}^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \otimes \\ p \end{smallmatrix} \mathbf{Q} \right) * \mathbf{T} \neq \mathbf{T}. \quad (4.18)$$

Jeżeli dla danego tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ istnieją takie $\mathbf{Q} \in \theta$, że w (4.18) zachodzi równość, to tensory \mathbf{Q} stanowią podgrupę $\theta_r \subset \theta$ grupy θ (4.2).

Faktycznie

1) Jeżeli $\left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q} \right) * \mathbf{T} = \mathbf{T}$, to

$$\left(\begin{smallmatrix} p & -1 \\ \otimes & \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q} \right) * \mathbf{T} = \left(\begin{smallmatrix} p & -1 \\ \otimes & \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q} \right) \left[\left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q} \right) * \mathbf{T} \right] = \left(\begin{smallmatrix} p & -1 \\ \otimes & \mathbf{Q} \mathbf{Q} \\ 1 \end{smallmatrix} \right) * \mathbf{T} = \left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{1} \right) * \mathbf{T} = \mathbf{T},$$

$$2) \text{ Jeżeli } \left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q}^1 \right) * \mathbf{T} = \mathbf{T} \text{ i } \left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q}^2 \right) * \mathbf{T} = \mathbf{T}, \text{ to}$$

$$\left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q}^1 \mathbf{Q}^2 \right) * \mathbf{T} = \left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q}^2 \right) * \mathbf{T} = \mathbf{T}.$$

Definicja

Podgrupę θ_T grupy θ określoną jako

$$\theta_T = \left\{ \mathbf{Q} \in \theta; \left(\begin{smallmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{smallmatrix} \mathbf{Q} \right) * \mathbf{T} = \mathbf{T} \right\} \quad (4.19)$$

nazywamy **grupą symetrii tensora** $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$. Tensor \mathbf{T} jest inwariantny względem automorfizmów $\mathbf{Q} \in \theta_T$. Grupa symetrii tensora θ_T nie jest pusta.

Tensor \mathbf{T} nazywamy **izotropowym**, gdy $\theta_T = \theta$.

Tensor \mathbf{T} nazywamy **hemitropowym**, gdy $\theta_T = \mathcal{R}$.

Jeżeli $\theta_T \neq \mathcal{R}$, $\theta_T \neq \theta$, to tensor \mathbf{T} nazywamy **anizotropowym**.

Tensor \mathbf{T} jest całkowicie anizotropowy, gdy

$\theta_T = \{\mathbf{1}\}$ dla p nieparzystego,

$\theta_T = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ dla p parzystego.

Definicja

Grupą symetrii zbioru tensorów $\mathbf{a} \in \mathfrak{D}_3, \mathbf{A} \in \mathcal{T}_2, \dots, \mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ (o różnych walencjach) nazywamy część wspólną grup symetrii wszystkich tensorów z tego zbioru

$$\theta_{a, A, \dots, T} \equiv \theta_a \cap \theta_A \cap \dots \cap \theta_T \quad (4.20)$$

Wnioski:

Tensory hemitropowe o walencji parzystej nie istnieją.

Tensory izotropowe o walencji nieparzystej nie istnieją.

Symetria tensora jest równoważna pewnym warunkom nałożonym na jego reprezentację.

Definicja

Dwie bazy \mathbf{e}_i i \mathbf{h}_α nazywamy *izometrycznymi* względem podgrupy $\tilde{\theta} \subset \theta$, jeżeli istnieje takie $\mathbf{Q} \in \tilde{\theta}$, że $\mathbf{e}_i = \delta^{\alpha_i} \mathbf{Q} \mathbf{h}_\alpha$.

Polibazy $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_k$ i $\mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{h}^\beta \otimes \dots \otimes \mathbf{h}_\gamma$ są izometryczne względem $\tilde{\theta}$ przy tym samym \mathbf{Q} , jeżeli pary baz $\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_\alpha$; $\mathbf{e}_j, \mathbf{h}_\beta \dots$ są izometryczne.

Podgrupa $\tilde{\theta} \subset \theta$ jest grupą symetrii tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ ($\tilde{\theta} = \theta_T$) wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentacje \mathbf{T} w polibazach izometrycznych względem $\tilde{\theta}$ są takie same.

Tensor \mathbf{T} jest izotropowy wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacje we wszystkich polibazach typu: $\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{n}_k$, (\mathbf{n}_k – baza ortonormalna) są takie same. Dwie dowolne bazy ortonormalne są izometryczne względem θ .

GRUPA SYMETRII WEWNĘTRZNEJ TENSORA**Definicja**

Grupą symetrii wewnętrznej tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy podgrupę grupy σ_p – automorfizmów zadanych przez permutacje

$$S_T \equiv \{ \sigma \in \sigma_p; \sigma \times \mathbf{T} = \mathbf{T} \}. \quad (4.21)$$

Tensor \mathbf{T} nazywamy absolutnie symetrycznym, gdy $S_T = \sigma_p$.

Gdy $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$ jest tensorem drugiego rzędu (o walencji 2), to σ_2 – grupa permutacji jest dwuelementowa

$$e = \langle 1, 2 \rangle, \quad \sigma = \langle 2, 1 \rangle, \quad \mathbf{T} \text{ symetryczny gdy } S_T = \sigma_2.$$

Dla tensorów 4 – tego rzędu $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_4$ grupa σ_4 jest $4! = 24$ elementowa.

Permutacje

$$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle, \langle 2, 1, 3, 4 \rangle, \langle 1, 2, 4, 3 \rangle, \langle 3, 4, 1, 2 \rangle$$

generują podgrupę $\tilde{\sigma}_4$. Tensory dla których $S_T = \tilde{\sigma}_4$ mają duże zastosowanie w mechanice. (Tensory Hooke'a).

PEŁNA GRUPA SYMETRII TENSORÓW

Symetria tensora może być rozpatrywana względem automorfizmów \mathcal{T}_p rodzonych przez θ – tensory ortogonalne – symetria zewnętrzna tensora i względem automorfizmów rodzonych przez σ_p – permutacje (4.21) – symetria wewnętrzna tensora. Możemy połączyć te dwie grupy. Utwórzmy z grup θ i σ_p dla \mathcal{T}_p nieuporządkowane pary

$$(\sigma, \mathbf{Q}) = (\mathbf{Q}, \sigma) \quad \sigma \in \sigma_p, \quad \mathbf{Q} \in \theta, \quad (4.22)$$

które tworzą grupę Σ .

Działaniem w grupie jest następujące działanie:

$$(\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{Q}}) \times (\check{\sigma}, \check{\mathbf{Q}}) \equiv (\tilde{\sigma}\check{\sigma}, \tilde{\mathbf{Q}}\check{\mathbf{Q}}).$$

Grupę Σ nazywamy **iloczynem prostym** grup θ, σ_p i zapisujemy w postaci

$$\Sigma = \theta \times \sigma_p = \sigma_p \times \theta \quad (\text{nie jest to iloczyn kartezjański!!!}).$$

Definicja

Pełną grupą symetrii tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy podgrupę grupy Σ o własnościach

$$\Sigma_T = \left\{ (\sigma, \mathbf{Q}) \in \Sigma; \sigma \times \left[\begin{pmatrix} p \\ \otimes \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{Q} \right] * \mathbf{T} = \mathbf{T} \right\}. \quad (4.23)$$

4.4. Przykłady grup symetrii

Rozpatrzmy teraz jako przykłady grupy symetrii tensorów o różnych walencjach (4.19).

- 1) Grupa symetrii wektora \mathbf{n}

$$\theta_n = \{ Q \in \theta; Q \mathbf{n} = \mathbf{n} \}.$$

Z faktu, że każdy tensor ortogonalny można przedstawić w postaci (4.3):

$$Q = m_1 \otimes n_1 + m_2 \otimes n_2 + m_3 \otimes n_3,$$

wynika, że gdy $n_1 = \mathbf{n}$ $Q \mathbf{n} = \mathbf{n}$, to

$$Q = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + m_2 \otimes n_2 + m_3 \otimes n_3,$$

gdzie $Q n_i = m_i$.

Stąd wynika, że

$$\theta_n = \{ \mathbf{1}, \mathbf{R}_n^\varphi, \mathbf{I}_k \}, \quad k \perp \mathbf{n}.$$

Jest to dowolny obrót wokół kierunku \mathbf{n} oraz odbicie względem płaszczyzny w której leży kierunek \mathbf{n} (płaszczyzny prostopadłej do kierunku \mathbf{k})

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{n}.$$

2) Grupa symetrii pary liniowo niezależnych wersorów \mathbf{n}, \mathbf{m} (4.19)

$$\theta_{n,m} = \{ Q \in \theta; Q \mathbf{n} = \mathbf{n}, Q \mathbf{m} = \mathbf{m} \}$$

$$Q(\mathbf{n} + \mathbf{m}) = Q \mathbf{n} + Q \mathbf{m} = \mathbf{n} + \mathbf{m}.$$

Podprzestrzeń rozpięta na wektorach \mathbf{n} i \mathbf{m} jest podprzestrzenią własną Q

$$Q = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \pm Q \mathbf{l} \otimes \mathbf{l}$$

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{m}, \mathbf{l} \perp \mathbf{n}, \mathbf{l} \perp \mathbf{m}$$

$$\theta_{n,m} = \{ \mathbf{1}, \mathbf{I}_l \}.$$

Jest to odbicie względem płaszczyzny prostopadłej do kierunku \mathbf{l} .

3) Grupa symetrii trzech wersorów liniowo niezależnych $\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{l}$

$$\theta_{n,m,l} = \{ \mathbf{1} \}.$$

4) Grupa symetrii diady $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ (4.19)

$$\mathbf{m}, \mathbf{l} \perp \mathbf{n}$$

$$\theta_{n \otimes n} = \{ Q \in \theta; Q \mathbf{n} \otimes Q \mathbf{n} = Q \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} Q^T = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \}$$

$$Q \mathbf{n} = \pm \mathbf{n}.$$

Stąd wynika, że

$$\theta_{n \otimes n} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_n, \mathbf{I}_k, \mathbf{R}_n^\varphi\}, \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{n}.$$

Grupa $\theta_{n \otimes n}$ jest bogatsza od θ_n o odbicie lustrzane \mathbf{I}_n .

5) Grupa symetrii diady $\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{m}$ (4.19)

$$\theta_{n \otimes m} = \{Q \in \theta; Q \mathbf{n} \otimes Q \mathbf{m} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}\}$$

$$Q \mathbf{n} \otimes Q \mathbf{m} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}.$$

Mnożąc lewostronnie przez \mathbf{n} i prawostronnie przez \mathbf{m} powyższe wyrażenie otrzymujemy

$$(\mathbf{n} Q \mathbf{n}) Q \mathbf{m} = \mathbf{m},$$

$$(\mathbf{m} Q \mathbf{m}) Q \mathbf{n} = \mathbf{n},$$

\mathbf{m}, \mathbf{n} – kierunki główne Q .

Stąd wynika, że

$$(\mathbf{n} Q \mathbf{n})(\mathbf{m} Q \mathbf{m})(Q \mathbf{m} \cdot Q \mathbf{n}) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n},$$

$$(\mathbf{n} Q \mathbf{n})(\mathbf{m} Q \mathbf{m}) = 1,$$

$$\text{sign}(\mathbf{n} Q \mathbf{n}) = \text{sign}(\mathbf{m} Q \mathbf{m}) = \varepsilon = \pm 1,$$

ponieważ Q zachowuje iloczyn skalarny.

Wektory własne \mathbf{m}, \mathbf{n} odpowiadają tej samej wartości własnej ε . Podprzestrzeń rozpięta na \mathbf{m}, \mathbf{n} jest podprzestrzenią własną; $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ – para ortonormalna leżąca w tej płaszczyźnie

$$Q = \varepsilon(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2) + \nu \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3, \quad \mathbf{n}_3 \perp \mathbf{n}_1 \quad \text{i} \quad \mathbf{n}_3 \perp \mathbf{n}_2$$

$$\theta_{\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}} = \theta_{\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{n_3}\}.$$

6) Grupa symetrii tensora drugiego rzędu $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$

$$\theta_A = \{Q \in \theta; Q \mathbf{A} Q^T = \mathbf{A}\}.$$

To znaczy, że $Q \mathbf{A} = \mathbf{A} Q$, $\mathbf{A} Q^T = Q^T \mathbf{A}$. Rozwiązań należy poszukiwać tylko wśród tych Q , które przekształcają na siebie przestrzenie własne \mathbf{A} .

Gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2^S$ (tensor symetryczny) wówczas z jego rozkładu spektralnego (3.36)

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + A_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + A_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3$$

wynika, że

a) gdy $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$

$$\theta_A = \{ \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3 \}.$$

Jest to grupa symetrii trzech diad $\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k$ (4.19). Odbicia względem płaszczyzn prostopadłych do trzech osi układu.

b) gdy $A_2 = A_3 \neq A_1$

$$\theta_A = \{ \mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{n_1}, \mathbf{R}_{n_1}^\varphi \}$$

c) gdy $A_1 = A_2 = A_3$ $\theta_A = \theta$.

Dwa tensory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2^S$ będziemy nazywać **zgodnymi**, jeżeli istnieje baza ortonormalna $\boldsymbol{\mu}_k$ taka, że

$$\mathbf{A} = A_1 \boldsymbol{\mu}_1 \otimes \boldsymbol{\mu}_1 + A_2 \boldsymbol{\mu}_2 \otimes \boldsymbol{\mu}_2 + A_3 \boldsymbol{\mu}_3 \otimes \boldsymbol{\mu}_3$$

$$\mathbf{B} = B_1 \boldsymbol{\mu}_1 \otimes \boldsymbol{\mu}_1 + B_2 \boldsymbol{\mu}_2 \otimes \boldsymbol{\mu}_2 + B_3 \boldsymbol{\mu}_3 \otimes \boldsymbol{\mu}_3.$$

Niektóre z A_k mogą być sobie równe i tak samo dla B_k .

Dwa tensory $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2^S$ będziemy nazywać **współosiowymi**, gdy przestrzenie własne tych tensorów pokrywają się. (Gdy wartości własne są jednokrotne lub dla wartości wielokrotnych jeżeli $A_1 = A_2$ to $B_1 = B_2$).

Dwa tensory zgodne nie będące współosiowymi będziemy nazywać **częściowo współosiowymi**, gdy wszystkie przestrzenie własne jednego należą do przestrzeni własnych drugiego.

Wnioski:

- 1) Dwa tensory symetryczne $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2^S$ są **zgodne** $\equiv \theta_A \cap \theta_B = \{ \mathbf{1}, -\mathbf{1} \}$.
- 2) Dwa tensory symetryczne $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2^S$ są **współosiowe** $\equiv \theta_A = \theta_B$.
- 3) Dwa tensory są **częściowo współosiowe** $\equiv \theta_A \subset \theta_B$ lub $\theta_B \subset \theta_A$.

Rozdział 5. Tensory czwartego rzędu – liniowa teoria sprężystości

5.1. Rozkład spektralny tensorów czwartego rzędu

Rozpatrujemy klasyczne ciało sprężyste, dla którego tensor małych odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ związany jest z tensorem naprężeń Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$ liniowym prawem Hooke'a [7], [17], [31], [32]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \sigma_{ij} &= S_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{kl} = C_{klmn} \sigma_{mn}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie \mathbf{S} jest tensorem sztywności, zaś \mathbf{C} jest tensorem podatności. Spełniona jest między nimi następująca zależność:

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{C} \circ \mathbf{S} = \mathbf{I}^S, \quad C_{ijmn} S_{mnlk} = S_{ijmn} C_{mnlk} = I_{ijkl}^S; \quad (\mathbf{I}^S)_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Obszar stosowalności prawa Hooke'a określa warunek graniczny typu Mises'a postaci ([21], [22])

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H} \boldsymbol{\sigma} \leq 1,$$

gdzie \mathbf{H} jest tensorem granicznym.

Tensory \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H} są tensorami czwartego rzędu. Są to elementy przestrzeni \mathcal{T}_4 , $\mathcal{T}_4 = \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3$, 3^4 – wymiarowej.

Posiadają one jednak pewne symetrie wewnętrzne (4.21) i zewnętrzne (4.19), przy czym kolejność ich rozpatrywania jest dowolna.

Symetrie wewnętrzne są symetiami ze względu na permutacje dla rozpatrywanych tensorów. Grupa symetrii (4.21) ${}^* \sigma_4$ dla tensorów czwartego rzędu typu Hooke'a jest postaci:

$$\sigma^1 = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle, \quad \sigma^2 = \langle 2, 1, 3, 4 \rangle, \quad \sigma^3 = \langle 1, 2, 4, 3 \rangle, \quad \sigma^4 = \langle 3, 4, 1, 2 \rangle \quad {}^* \sigma_4 \subset \sigma_4.$$

Oznacza to, że zachodzą następujące równości dla składowych tych tensorów

$$\begin{aligned} C_{ijmn} &= C_{jimm} = C_{ijnm} = C_{mnij}, \\ S_{mnkl} &= S_{nmkl} = S_{mnlk} = S_{klmn}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Tensory \mathbf{S} , \mathbf{C} i \mathbf{H} są inwariantne względem σ_4^* . Fakt ten wynika z symetrii tensorów odkształcenia i naprężenia oraz z istnienia potencjału. Tensory \mathbf{S} i \mathbf{C} występują w prawie Hooke'a jako operatory liniowe odwzorowujące $\mathcal{T}_2^S \rightarrow \mathcal{T}_2^S$; (\mathcal{T}_2^S – przestrzeń tensorów symetrycznych drugiego rzędu, tensory bezwymiarowe odkształcenia i tensory naprężenia odniesione do naprężenia charakterystycznego). Tensor \mathbf{H} będzie miał charakter operatora liniowego, jeśli będziemy rozpatrywać stowarzyszone prawo płynięcia. Tensor \mathbf{H} występuje w formie kwadratowej. W formie kwadratowej będą występowały również tensory \mathbf{S} i \mathbf{C} w wyrażeniu na gęstość energii sprężystej [35], [36]

$$\begin{aligned} 2\phi &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} \geq 0, \\ 2\phi &= \varepsilon_{ij} S_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{mn} S_{mnlk} \sigma_{kl}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Poszukujemy ekstremum energii sprężystej na kuli (sferze jednostkowej $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 1$), (ekstremum warunkowe) wyrażenia (5.3)

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - 1), \\ \psi_{\boldsymbol{\varepsilon}} &\equiv \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - 2\lambda \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} &= \lambda \mathbf{w} \quad (\lambda - \text{mnożnik Lagrange'a}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Warunek konieczny na istnienie ekstremum na kierunku \mathbf{w} prowadzi zatem do zagadnienia na stany własne [8], [35].

Dla deformacji $\boldsymbol{\varepsilon}$ w kierunku \mathbf{w}

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= e \mathbf{w}, \\ e \mathbf{S} \cdot \mathbf{w} &= e \lambda \mathbf{w}, \\ \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= \lambda \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

Prawo Hooke'a na stanach własnych ma postać proporcjonalności naprężenia i odkształcenia. Hooke w 1678 r. ogłosił swoje prawo w formie „ut tensio sic vis” (ceiinossttuv). Stąd tytuł pracy [31].

Z teorii operatorów liniowych wynika, że równość (5.4)

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$$

jest zagadnieniem na wartości własne i stany własne dla tensora \mathbf{S} .

Unormowane rozwiązanie \mathbf{w} (\mathbf{w} - tensor symetryczny drugiego rzędu) dla wartości λ nazywać będziemy *sprężystym stanem własnym*, zaś skalar λ *modulem sztywności*. Pojęcie operatora liniowego, stanów własnych i elementów własnych są pojęciami z algebry liniowej [8], [31], [42].

Tensor \mathbf{S} , jako operator występujący w prawie Hooke'a, odwzorowuje przestrzeń tensorów symetrycznych drugiego rzędu \mathcal{T}_2^S w przestrzeń tensorów symetrycznych

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \mathcal{T}_2^S &\rightarrow \mathcal{T}_2^S, \\ \mathcal{T}_2^S &= \text{sym } \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3. \end{aligned}$$

Przestrzeń \mathcal{T}_2^S jest przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \alpha_{ij} \beta_{ij}.$$

Wróćmy w tym miejscu do twierdzenia dotyczącego ogólnej postaci liniowego odwzorowania przestrzeni tensorowych (3.13).

TWIERDZENIE 5.1

Niech $\mathcal{L} : \mathcal{P}_p \rightarrow \mathcal{P}_q$ jest liniowym odwzorowaniem przestrzeni tensorowej \mathcal{P}_p w przestrzeń tensorową \mathcal{P}_q , gdzie p i q oznaczają walencje tensorów, wówczas

$$\bigvee_{\mathbf{L} \in \mathcal{T}_{p+q}}^1 \bigwedge_{\mathbf{A} \in \mathcal{P}_p} \mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \in \mathcal{P}_q.$$

A zatem liniowe odwzorowanie przestrzeni tensorowych utożsamiamy z tensorem o walencji $p+q$. Realizuje się ono przez pełne nasunięcie tensorów \mathbf{L} i \mathbf{A} .

Przestrzeń \mathcal{P}_p jest przestrzenią liniową 3^p – wymiarową z iloczynem skalarnym jako pełne nasunięcie dwóch tensorów \mathbf{A} i \mathbf{B} .

Normą tensora jest pełne nasunięcie tensora na siebie podniesione do potęgi $\frac{1}{2}$

$$|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{\frac{1}{2}}.$$

W przestrzeni \mathcal{T}_p istnieje baza ortonormalna \mathbf{H}_k , ($\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{H}_l = \delta_{kl}$), która generuje całą przestrzeń \mathcal{T}_p , a mianowicie

$$\bigwedge_{\mathbf{A} \in \mathcal{T}_p} \bigvee_{A_k \in R}^1 \quad \mathbf{A} = A_k \mathbf{H}_k, \quad A_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_k.$$

Stąd wynika, że

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = A_k \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}_k = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{H}_k \otimes \mathbf{H}_k) \mathbf{A}, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}_k \otimes \mathbf{H}_k.$$

W ogólnym przypadku w przestrzeni \mathcal{T}_p istnieje baza \mathbf{H}_k i kobaza \mathbf{H}^l , takie, że $\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{H}^l = \delta_k^l$. Baza \mathbf{H}_k generuje całą przestrzeń \mathcal{T}_p

$$\bigwedge_{\mathbf{A} \in \mathcal{T}_p} \bigvee_{A^k \in R}^1 \quad \mathbf{A} = A^k \mathbf{H}_k, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^l = A^k \mathbf{H}_k \cdot \mathbf{H}^l = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^l = A^k \delta_k^l = A^l.$$

Otrzymujemy zatem, że

$$A^k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}^k, \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} (A^k \mathbf{H}_k) = A^k \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}_k = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{H}_k \otimes \mathbf{H}^k) \cdot \mathbf{A}.$$

Operator \mathbf{L} jest określony jeśli jest on określony na bazie \mathbf{H}_k

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{H}_k \otimes \mathbf{H}^k. \quad (5.6)$$

Równość ta jest fundamentalną tożsamością dla danego operatora liniowego L i dowolnej bazy [31].

Z tej tożsamości wynika, że operator jest zadany, jeśli jest zadany na tensorach bazy (można wprowadzić bazę ortonormalną (5.5)).

Jeśli operator L odwzorowuje $\mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_p$ ($p=q$) wówczas $L \in \mathcal{T}_{2p}$ i dla takich operatorów ma sens zagadnienie na wartości własne i stany własne.

Gdy $p=1$ wówczas $L \in \mathcal{T}_2$ i jest afinorem odwzorowującym $\mathfrak{E}_3 \rightarrow \mathfrak{E}_3$, $L = A$.

Z fundamentalnej tożsamości wynika wówczas, że

$$A = A \mu_k \otimes \mu_k,$$

gdzie μ_k jest bazą ortonormalną w \mathfrak{E}_3 .

Jeżeli μ_k jest bazą wektorów własnych dla A wówczas otrzymujemy rozkład spektralny tensora A (3.36)

$$A = A_1 \mu_I \otimes \mu_I + A_2 \mu_{II} \otimes \mu_{II} + A_3 \mu_{III} \otimes \mu_{III}.$$

Gdy $p=2$ operator $L \in \mathcal{T}_4$ i odwzorowuje przestrzeń tensorów rzędu drugiego w przestrzeń tensorów drugiego rzędu ($\mathcal{T}_2^S \rightarrow \mathcal{T}_2^S$). Takim operatorem jest tensor sztywności S w prawie Hooke'a (5.1).

Z fundamentalnej tożsamości (5.6) dla przypadku, gdy $L=S$ wynika, że

$$S = S \cdot \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k,$$

gdzie \mathbf{v}_k jest bazą ortonormalną w sześciowymiarowej przestrzeni \mathcal{T}_2^S , ($k = I, II, \dots, VI$).

Operatorem tożsamościowym jest tensor I – tensor jednostkowy czwartego rzędu

$$\begin{aligned} I \cdot A &= A, \quad I = \langle 1, 3, 2, 4 \rangle \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \\ I_{ijkl} &= \delta_{ik} \delta_{jm}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Przestrzeń \mathcal{T}_2^S jest symetryczna, zatem rozpatrujemy część symetryczną I^S

$$(I^S)_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

$$(I^S)_{ijkl} A_{km} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) A_{km} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}).$$

Korzystając z fundamentalnej tożsamości (5.5) otrzymujemy, że

$$\mathbf{I}^S = \mathbf{I}^S \cdot \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k \otimes \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_I \otimes \mathbf{v}_I + \dots + \mathbf{v}_{IV} \otimes \mathbf{v}_{IV} + \mathbf{v}_V \otimes \mathbf{v}_V + \mathbf{v}_{VI} \otimes \mathbf{v}_{VI}.$$

Jest to rozkład spektralny \mathbf{I}^S , gdzie \mathbf{v}_k jest dowolną bazą ortonormalną w \mathcal{T}_2^S .

Z ogólnej teorii operatorów liniowych w przestrzeniach z iloczynem skalarnym wynika, że dla operatorów o symetriach, które posiada \mathbf{S} istnieje sześć rzeczywistych wartości własnych $\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}$, którym odpowiada sześć określonych co do znaku wzajemnie ortogonalnych, unormowanych tensorów własnych $\mathbf{w}_I, \dots, \mathbf{w}_{VI}$.

Dla każdego k zachodzi wówczas równość

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_k = \lambda_k \mathbf{w}_k, \quad k = I, II \dots VI \quad (\text{nie sumować}).$$

Dla bazy \mathbf{w}_k , która jest bazą tensorów własnych, z fundamentalnej tożsamości (5.5) dla operatora \mathbf{S} wynika, że

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k = \lambda_I \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \dots + \lambda_{VI} \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}. \quad (5.8)$$

Jest to rozkład spektralny tensora sztywności \mathbf{S} [6], [31], [32], [35], [42].

Dla tensora podatności zagadnienie na wartości własne ma wówczas postać

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{w}_k = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k.$$

Oznacza to, że tensory sztywności i podatności mają takie same stany własne, zaś ich wartości własne są równe wzajemnej odwrotności. Rozkład spektralny tensora podatności ma zatem postać

$$\mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \dots + \frac{1}{\lambda_{VI}} \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}. \quad (5.9)$$

Rozkłady spektralne (5.8) i (5.9) rozpatrywanych tensorów są wyznaczone jednoznacznie, gdy wszystkie wartości λ_k są jednokrotne.

Wykorzystując rozkład spektralny tensora \mathbf{S} (5.8), energię sprężystą można wyrazić przez jego wartości własne. Z rozkładu spektralnego \mathbf{S} oraz rozkładu $\boldsymbol{\varepsilon}$ w bazie \mathbf{w}_k , a mianowicie

$$\boldsymbol{\varepsilon} = e_I \mathbf{w}_I + \dots + e_{VI} \mathbf{w}_{VI}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{w}_k = e_k$$

wynika, że

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = (\lambda_I \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \dots + \lambda_{VI} \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda_I e_I \mathbf{w}_I + \dots + \lambda_{VI} e_{VI} \mathbf{w}_{VI}.$$

Stąd otrzymujemy wyrażenie na energię sprężystą w postaci

$$2\phi = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = (\lambda_I e_I \mathbf{w}_I + \dots + \lambda_{VI} e_{VI} \mathbf{w}_{VI}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda_I e_I^2 + \dots + \lambda_{VI} e_{VI}^2. \quad (5.10)$$

Energię sprężystą w takiej postaci, bez wprowadzenia pojęcia stanów własnych, podał Lord Kelvin (W. Thomson w 1856 r.) [44]. Z tego względu Rychlewski [35] zaproponował aby moduły sztywności λ_k nazywać **modułami Kelvina**. Każdy ciąg $(\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}; \mathbf{w}_I, \dots, \mathbf{w}_{VI})$, gdzie λ_k są stałymi nieujemnymi, a wersory \mathbf{w}_k , określone z dokładnością do znaku $\pm \mathbf{w}_k$, są bazą ortonormalną w \mathcal{T}_2^S , opisuje pewien teoretycznie możliwy materiał sprężysty.

5.2. Projektory, moduły Kelvina

Przestrzeń inwariantna dla operatora \mathbf{S}

Podprzestrzeń $\mathcal{M}_S \subset \mathcal{T}_2^S$ nazywamy inwariantną dla \mathbf{S} jeżeli

$$\bigwedge_{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_S} \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \in \mathcal{M}_S.$$

Podprzestrzeń \mathcal{M}_S może nie zawierać żadnego tensora własnego.

Podprzestrzenie własne

Zbiór \mathcal{N}_λ rozwiązań równania $\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A}$ jest zbiorem tensorów własnych dla operatora \mathbf{S} odpowiadających wartości własnej λ uzupełniony wektorem zerowym jest podprzestrzenią inwariantną dla \mathbf{S} . Nazywać ją będziemy **podprzestrzenią własną**

$$\mathcal{N}_\lambda = \left\{ \mathbf{A} \in \mathcal{T}_2^S ; \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} \right\}. \quad (5.11)$$

Nie każda podprzestrzeń inwariantna dla operatora \mathbf{S} jest podprzestrzenią własną. Podprzestrzenie własne odpowiadające różnym wartościom λ_k są ortogonalne. Podprzestrzenie własne są przestrzeniami inwariantnymi.

Istotną rolę w teorii odwzorowań liniowych odgrywają **projektory ortogonalne**. Są to tensory czwartego rzędu – najprostsze, po operatorze tożsamościowym (5.7), operatory liniowe. Poszukamy ich tensorowej postaci.

Przedstawimy przestrzeń \mathcal{T}_2^S w postaci sumy prostej podprzestrzeni ortogonalnych

$$\mathcal{T}_2^S = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_6. \quad (5.12)$$

Dowolny tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2^S$ można wówczas przedstawić jednoznacznie w postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_6, \quad \mathbf{A}_k \in \mathcal{P}_k.$$

Tensor $\mathbf{A}_k \in \mathcal{P}_k$ jest częścią tensora \mathbf{A} . Istnieje tensor czwartego rzędu \mathbf{P}_k , który realizuje to przyporządkowanie

$$\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}_k. \quad (5.13)$$

Tensor o tej własności nazywamy **ortogonalnym projektorem** \mathcal{T}_2^S na podprzestrzeń \mathcal{P}_k . Jest to tensor, który na elementach $\mathbf{A} \in \mathcal{P}_k$ działa jak tensor jednostkowy (operator tożsamościowy), zaś elementom nie należącym do \mathcal{P}_k przyporządkowuje tensory zerowe

$$\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{A} = \begin{cases} \mathbf{A} & \text{dla } \mathbf{A} \in \mathcal{P}_k, \\ \mathbf{0} & \text{dla } \mathbf{A} \notin \mathcal{P}_k. \end{cases}$$

Jest to tensor **izotropowy**.

Niech \mathbf{P}_k będzie projektorem na podprzestrzeń własną \mathcal{P}_k odpowiadającą wartości własnej λ_k .

Z fundamentalnej tożsamości (5.5)

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k$$

wynika, że projektor \mathbf{P}_k ma postać

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \dots + \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}.$$

Z definicji projektora \mathbf{P}_k otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k &= \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k, \text{ (nie sumować)} \\ \mathbf{P}_1 &= \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I, \quad \mathbf{P}_2 = \mathbf{w}_{II} \otimes \mathbf{w}_{II}, \dots, \mathbf{P}_6 = \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}. \end{aligned}$$

Dla operatora tożsamościowego (5.7) zachodzi zatem równość

$$\mathbf{I}^S = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_6. \quad (5.14)$$

Rozpatrywaliśmy dotychczas sytuację, gdy przestrzenie własne \mathcal{P}_k były jednowymiarowe ($\lambda_k \neq \lambda_l$ dla $k \neq l$).

Niech λ_k będzie l -krotnym pierwiastkiem (l -krotną wartością własną tensora \mathbf{S}). Dla operatorów o symetrii tensora \mathbf{S} wynika, że krotność algebraiczna pokrywa się z krotnością geometryczną. Przestrzeń własna \mathcal{P}_k odpowiadająca wartości własnej λ_k jest również l -wymiarowa.

Niech $\mathbf{w}_I, \mathbf{w}_{II}, \dots, \mathbf{w}_l$ będą dowolną bazą w \mathcal{P}_k . Z fundamentalnej tożsamości dla projektora (5.5)

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \dots + \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_l \otimes \mathbf{w}_l + \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_{l+1} \otimes \mathbf{w}_{l+1} + \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}$$

oraz z faktu, że

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_I &= \mathbf{w}_I, \dots, \quad \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_l = \mathbf{w}_l, \\ \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_{l+1} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{w}_{VI} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

wynika postać projektora \mathbf{P}_k , a mianowicie

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \dots + \mathbf{w}_l \otimes \mathbf{w}_l, \quad (5.15)$$

Projektor \mathbf{P}_k określony jest jednoznacznie. Należy podkreślić, że poszczególne diady $\mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k$ nie są określone jednoznacznie.

Rozkład \mathbf{I}^S dla wielokrotnych modułów sztywności przyjmuje postać

$$\mathbf{I}^S = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_\rho, \quad \rho \leq 6, \quad (5.16)$$

(ρ – liczba różnych modułów Kelvina).

Możemy zatem podać **główny wzór strukturalny** liniowej teorii sprężystości.

TWIERDZENIE 5.2

Dla dowolnego sprężystego ciała \mathbf{S} istnieje dokładnie jedno ortogonalne rozłożenie przestrzeni tensorów symetrycznych drugiego rzędu na podprzestrzenie \mathcal{P}_k

$$\mathcal{T}_2^S = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho, \quad \rho \leq 6, \quad \mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta$$

i dokładnie jeden ciąg modułów Kelvina $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_\rho$ taki, że

$$\mathbf{S} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho, \quad (5.17)$$

gdzie tensor \mathbf{P}_k jest projektorem ortogonalnym na podprzestrzeń \mathcal{P}_k . Rozkład ten jest jednoznaczny ([6], [32], [35], [36], [42]).

Dla tensora podatności \mathbf{C} rozkład spektralny (5.9) będzie miał wówczas postać

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho. \quad (5.18)$$

Podprzestrzeń \mathcal{P}_k tworzą wszystkie stany własne dla \mathbf{S} odpowiadające wartości własnej λ_k . Jeżeli \mathbf{S} i \mathbf{C} są zadane, to moduły λ_k i projektory \mathbf{P}_k wyznacza się w standardowy sposób. Projektory \mathbf{P}_k nazywane są **projektorami materialnymi**, a podprzestrzenie \mathcal{P}_k **podprzestrzeniami materialnymi**.

WYZNACZANIE MODUŁÓW KELVINA

Zagadnienie na wartości własne i stany własne dla operatora \mathbf{S} (5.4) sprowadza się do równości

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w} \quad (\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}^S) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Jest to układ równań liniowych jednorodnych. Aby istniały niezerowe rozwiązania, tensor $(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}^S)$ musi być osobliwy, tzn. $\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}^S) = 0$. Powstaje pytanie: Jak policzyć wyznacznik dla tensora czwartego rzędu?

W przestrzeni \mathcal{T}_2^S (sześciowymiarowej) wybieramy dowolną bazę ortonormalną

$$\mathbf{v}_K, \quad K = I, II, \dots, VI; \quad \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{v}_L = \delta_{KL}.$$

Dla tensora $\mathbf{L} \in T_4$ $\det(\mathbf{L}) \equiv \det(L_{KL})$, gdzie

$$L_{KL} = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}_L = L_{LK}. \quad (5.20)$$

Macierz L_{KL} jest macierzą kwadratową, symetryczną 6×6 otrzymaną z tensora \mathbf{L} i dowolnej bazy \mathbf{v}_K .

Stąd wynika, że

$$\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}^S) = \det[\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_L - \lambda \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{I}^S \cdot \mathbf{v}_L] = \det[\mathbf{v}_K \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_L - \lambda \delta_{KL}].$$

Warunek $\det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}^S) = 0$ sprowadza się do równania charakterystycznego 6 – tego stopnia dla λ

$$\lambda^6 + a_1 \lambda^5 + a_2 \lambda^4 + \dots + a_5 \lambda + a_6 = 0. \quad (5.21)$$

Współczynniki a_k tego równania są funkcjami od niezmienników tensora \mathbf{S} i tym samym nie zależą od wyboru bazy [45].

Gdy $\mathbf{v}_k = \mathbf{w}_k$, gdzie \mathbf{w}_k są stanami własnymi, macierz S_{KL}

$$S_{KL} = \mathbf{w}_K \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_L$$

jest macierzą diagonalną.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że tensory \mathbf{w}_k i $-\mathbf{w}_k$ są fizycznie różnymi tensorami. Nie istnieje takie \mathbf{Q} , które odwzorowuje $\mathbf{w} \rightarrow -\mathbf{w}$. Teorie uwzględniające znak są teoriami silnie nieliniowymi.

Współczynniki występujące w równaniu charakterystycznym można wyrazić przez moduły Kelvina.

Z równania

$$\det(\mathbf{w}_K \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}_L - \lambda \delta_{KL}) = 0$$

w bazie stanów własnych wynika, że

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_I - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{II} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{VI} - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - \lambda_I)(\lambda - \lambda_{II}) \cdots (\lambda - \lambda_{VI}) = 0.$$

Po uporządkowaniu wyrażeń przy odpowiednich potęgach λ otrzymujemy współczynniki a_k wyrażone przez $\lambda_I, \lambda_{II}, \dots, \lambda_{VI}$. Współczynniki w równaniu charakterystycznym są niezmiennikami dla tensora \mathbf{S} . I tak np.

$$a_6 = \det(\mathbf{S}) = \lambda_I \cdots \lambda_{VI}.$$

WYZNACZANIE PROJEKTORÓW

Jeżeli równanie charakterystyczne (5.21) ma ρ różnych λ_k pierwiastków, to rozkład spektralny dla tensora \mathbf{S} ma postać (5.17)

$$\mathbf{S} = \lambda_I \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho.$$

Każde z λ_k spełnia równanie charakterystyczne (5.21), mamy zatem ρ równań

$$\begin{aligned}\lambda_I^6 + a_1 \lambda_I^5 + \dots + a_6 &= 0, \\ \lambda_{II}^6 + a_1 \lambda_{II}^5 + \dots + a_6 &= 0, \\ \vdots \\ \lambda_\rho^6 + a_1 \lambda_\rho^5 + \dots + a_6 &= 0.\end{aligned}$$

Mnożąc odpowiednio pierwsze równanie przez \mathbf{P}_1 , drugie przez $\mathbf{P}_2, \dots, \rho$ przez \mathbf{P}_ρ i dodając stronami otrzymujemy równanie tensorowe

$$(\lambda_I^6 \mathbf{P}_1 + \lambda_{II}^6 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_\rho^6 \mathbf{P}_\rho) + a_1 (\lambda_I^5 \mathbf{P}_1 + \lambda_{II}^5 \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_\rho^5 \mathbf{P}_\rho) + \dots + a_6 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_\rho) = \mathbf{0},$$

które ma postać uogólnionego równania Cayle'a-Hamilton'a (3.33)

$$\overset{6}{\mathbf{S}} + a_1 \overset{5}{\mathbf{S}} + \dots + a_5 \mathbf{S} + a_6 \mathbf{1}^S = \mathbf{0},$$

ponieważ z (5.17) wynika, że

$$\overset{n}{\mathbf{S}} = \lambda_I^n \mathbf{P}_1 + \lambda_{II}^n \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_\rho^n \mathbf{P}_\rho.$$

Aby wyznaczyć projektory $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_\rho$ należy rozwiązać tensorowy układ ρ równań liniowych :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_\rho &= \mathbf{I}^S, \\ \lambda_I \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho &= \mathbf{S}, \\ \vdots \\ \lambda_I^{(\rho-1)} \mathbf{P}_1 + \lambda_{II}^{(\rho-1)} \mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_\rho^{(\rho-1)} \mathbf{P}_\rho &= \overset{(\rho-1)}{\mathbf{S}}.\end{aligned}$$

Wyznacznik podstawowy jest postaci wyznacznika Vandermonda

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_I & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_\rho \\ \lambda_I^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_\rho^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_I^{(\rho-1)} & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_\rho^{(\rho-1)} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq \beta < \alpha \leq \rho} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta).$$

Z założenia $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ dla $\alpha \neq \beta$ a zatem $\Delta \neq 0$. Stąd wynika, że

$$\mathbf{P}_\alpha = \frac{(\mathbf{S} - \lambda_I \mathbf{1}^S) \circ \cdots \circ (\mathbf{S} - \lambda_{\alpha-1} \mathbf{1}^S) \circ (\mathbf{S} - \lambda_{\alpha+1} \mathbf{1}^S) \circ \cdots \circ (\mathbf{S} - \lambda_\rho \mathbf{1}^S)}{(\lambda_\alpha - \lambda_I) \cdots (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1}) (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) \cdots (\lambda_\alpha - \lambda_\rho)},$$

$$\lambda_\alpha = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_\alpha.$$

Jeżeli dla danego materiału, dla danego \mathbf{S} istnieje ρ parami różnych modułów Kelvina $\lambda_k \neq \lambda_l$ gdy $k \neq l$, to odpowiada im ρ podprzestrzeni własnych wzajemnie ortogonalnych. Oznaczając przez q_k wymiar podprzestrzeni własnej \mathcal{P}_k odpowiadającej λ_k otrzymujemy równość

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_\rho = 6. \quad (5.22)$$

Wyrażenie $\langle q_1 + q_2 + \cdots + q_\rho \rangle$ Rychlewski [31] zaproponował nazwać **pierwszym indeksem strukturalnym**. Jeżeli wielomian charakterystyczny ma 6 różnych jednokrotnych pierwiastków, wówczas wszystkie przestrzenie własne są jednowymiarowe i pierwszy indeks strukturalny ma postać $\langle 1+1+1+1+1+1 \rangle$.

Z rozkładu spektralnego wynika, że jeśli są znane moduły Kelvina $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho$, to znany jest tensor sztywności \mathbf{S} jeżeli zadane są projektory $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\rho$. Projektory $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_\rho$ są tensorami rzędu czwartego. Nie znana jest baza zupełna niezmienników dla takich tensorów [31], [45].

Dla jednokrotnych modułów Kelvina λ_k projektor \mathbf{P}_k ma postać diady stanów własnych

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{w}_k \otimes \mathbf{w}_k \text{ (nie sumować),}$$

a zatem ciąg $(\lambda_I, \dots, \lambda_{VI}; \mathbf{w}_I, \dots, \mathbf{w}_{VI})$ dla \mathbf{w}_k określonych z dokładnością do znaku $\pm \mathbf{w}_k$ opisuje pewien teoretycznie możliwy materiał \mathbf{S} (5.8).

Tensor \mathbf{w}_k są symetryczne, unormowane $\mathbf{w}_K \cdot \mathbf{w}_L = 1$ i ortogonalne $\mathbf{w}_K \cdot \mathbf{w}_L = \delta_{KL}$.

Tensor symetryczny drugiego rzędu w dowolnej bazie ma 6 składowych istotnie różnych. Dla 6 tensorów mamy $6 \times 6 = 36$ składowych.

Warunki ortonormalności stanowią $\binom{6}{2} = 15$ warunków + 6 warunków unormowania. Razem mamy $15 + 6 = 21$ warunków. Pozostało zatem $36 - 21 = 15$ wielkości niezależnych.

Tensor sztywności \mathbf{S} ze względu na symetrię wewnętrzną ((4.21) ze względu na permutacje) ma istotnie różnych 21 składowych. Wśród S_{ijkl} ($3^4 = 81$) istotnie różnych jest 21.

Rozmaitość ciał sprężystych jest opisana lokalnie w sposób ciągły przez $6 + 15 = 21$ parametrów tworzących trzy grupy :

- I. 6 modułów Kelvina – niezmienników, wielkości wymiarowych mających wymiar naprężenia,
- II. Z 15 wielkości wydzielamy 12 wielkości bezwymiarowych związanych z \mathbf{w}_K , niezmienników zwanych **dystrybutorami sztywności**, które oznaczamy przez κ_k .
- III. 3 wielkości, które są związane z umiejscowieniem próbki w laboratorium np. : kąty Eulera. Nie są to niezmienniki.

Możemy zatem napisać $6 + (12 + 3) = 21$.

Sprawa dystrybutorów jest sprawą złożoną, ponieważ dystrybutory mają nie reagować na znak $\pm \mathbf{w}_k$. Powstaje pytanie: Jak zadać te dystrybutory aby otrzymać jednoznacznie określony materiał sprężysty \mathbf{S} ? Sprawę tę dla każdej symetrii materiału należy rozpatrywać niezależnie.

Jeżeli materiał posiada jakąkolwiek symetrię wówczas liczba niezależnych składowych tensora \mathbf{S} maleje. Pojawiają się wielokrotne moduły Kelvina, wielowymiarowe przestrzenie własne. Maleje zatem liczba dystrybutorów jak również liczba kątów Eulera.

W wyrażeniu

$$\langle \lambda_1, \dots, \lambda_{17}; \kappa_1, \dots, \kappa_{12}; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$$

należy napisać

$$\langle \lambda_1, \dots, \lambda_\rho; \kappa_1, \dots, \kappa_t; \varphi_1, \dots, \varphi_u \rangle. \quad (5.23)$$

Wyrażenie $[\rho + t + u]$ Rychlewski [31] nazwał **drugim indeksem strukturalnym**. Spełnione są nierówności

$$\rho \leq 6, \quad t \leq 12, \quad u \leq 3; \quad \rho + t + u \leq 21. \quad (5.24)$$

Dalsza dyskusja materiałów sprężystych jest możliwa jeżeli nałoży się pewne warunki symetrii na \mathbf{S} (symetrii ze względu na automorfizm rodzony przez tensory ortogonalne $\mathbf{Q} \in \theta$) (4.19).

Reasumując, możemy teraz odpowiedzieć na pytanie postawione przez prof. Rychlewskiego w Instytucie Mechaniki w Moskwie, gdzie wygłosił w 1983 r. referat na seminarium : „O prawie Hooke’a” [31]. Pytanie to brzmiało: „Co jeszcze można dopowiedzieć do prawa Hooke’a, po klasycznych pracach Neumanna i Voighta?”. Odpowiedź brzmi, że można.

Założmy, że w dwóch różnych laboratoriach badano dwie próbki i otrzymano zbiór danych: S_{ijkl} i $S'_{i'j'k'l'}$. Składowe S_{ijkl} , przy przypadkowym ustawieniu próbki nie stanowią stałych materiałowych. Przy zmianie bazy zmieniają się składowe. Czy badane próbki opisane przez S_{ijkl} i $S'_{i'j'k'l'}$ są z tego samego materiału? Odpowiedzi ogólnej nie znamy. Nie znamy kompletu stałych materiałowych, tzn. kompletu niezmienników opisujących tensor \mathbf{S} z dokładnością do sztywnego obrotu [45].

Jeżeli usytuowanie próbki względem laboratorium określają 3 kąty Eulera, to funkcjonalnie zupełna baza niezmienników ortogonalnych, opisujących lokalnie w sposób ciągły rozmaitość różnych od siebie materiałów powinna zawierać $21 - 3 = 18$ niezmienników.

Konwencjonalne podejście nie określa postaci takiej bazy dla materiału postaci ogólnej. Klasyczna klasyfikacja tensorów sztywności według symetrii wnosi tym mniej informacji im węższa jest grupa symetrii i nie daje nic wówczas gdy rozważany materiał symetrii nie posiada. Należy się spodziewać, że liczba materiałów o sterowanej symetrii będzie narastać.

Moduły sztywności i dystrybutory stanów własnych są jednakowe dla dowolnych dwóch ciał z tego samego materiału.

Zawierają one w sobie całą informację o makrostrukturze ciała, która jest wystarczająca do opisu jego sprężystego zachowania.

Przykład bazy w \mathcal{T}_2^S generowanej przez bazę \mathbf{e}_k w \mathfrak{E}_3 ($\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_I &= \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, & \mathbf{v}_{II} &= \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_{III} &= \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{v}_V &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{v}_{VI} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2). \end{aligned}$$

Jest to baza (polibaza) ortonormalna w \mathcal{T}_2^S .

Jeżeli S_{ijkl} , składowe tensora \mathbf{S} w polibazie $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ tzn.

$$\mathbf{S} = S_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l,$$

to macierz $S_{KL} = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_L$ będzie miała postać :

$$\left[\begin{array}{cccccc} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & \sqrt{2} S_{1123} & \sqrt{2} S_{1113} & \sqrt{2} S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & \sqrt{2} S_{2223} & \sqrt{2} S_{2213} & \sqrt{2} S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & \sqrt{2} S_{3323} & \sqrt{2} S_{3313} & \sqrt{2} S_{3312} \\ & & & 2S_{2323} & 2S_{2313} & 2S_{2312} \\ & & & & 2S_{1313} & 2S_{1312} \\ & & & & & 2S_{1212} \end{array} \right]. \quad (5.25)$$

symetryczna

W fizyce kryształów jest popularna macierzowa forma opisywania prawa Hooke'a [39]

MODUŁY SZTYWNOŚCI

Z twierdzenia spektralnego dla tensora podatności \mathbf{C} (5.9)

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_I} \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \frac{1}{\lambda_{II}} \mathbf{w}_{II} \otimes \mathbf{w}_{II} + \dots + \frac{1}{\lambda_{VI}} \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}$$

wynika, że [31]:

a)

$$\frac{1}{K} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} = \frac{(\text{tr } \mathbf{w}_I)^2}{\lambda_I} + \frac{(\text{tr } \mathbf{w}_{II})^2}{\lambda_{II}} + \dots + \frac{(\text{tr } \mathbf{w}_{VI})^2}{\lambda_{VI}}, \quad (5.26)$$

gdzie K jest **modułem sztywności objętościowej**.

b) Jeżeli \mathbf{n} jest kierunkiem w \mathfrak{E}_3 , to

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(\mathbf{n})} &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{n})^2}{\lambda_I} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_{II} \cdot \mathbf{n})^2}{\lambda_{II}} + \dots + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_{VI} \cdot \mathbf{n})^2}{\lambda_{VI}} = \\ &= \frac{\left(\begin{smallmatrix} (nn) \\ \mathbf{w}_I \end{smallmatrix} \right)^2}{\lambda_I} + \frac{\left(\begin{smallmatrix} (nn) \\ \mathbf{w}_{II} \end{smallmatrix} \right)^2}{\lambda_{II}} + \dots + \frac{\left(\begin{smallmatrix} (nn) \\ \mathbf{w}_{VI} \end{smallmatrix} \right)^2}{\lambda_{VI}}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdzie $E(\mathbf{n})$ jest **modułem Young'a** dla kierunku \mathbf{n} .

c) Jeżeli \mathbf{n} i \mathbf{m} są dwoma kierunkami ortogonalnymi w \mathfrak{E}_3 , to

$$\begin{aligned} \frac{\nu(m, n)}{E(\mathbf{n})} &= \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{n})(\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{m})}{\lambda_I} + \dots + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_{VI} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_{VI} \cdot \mathbf{m})}{\lambda_{VI}} = \\ &= \frac{\begin{smallmatrix} (nn) & (mm) \\ \mathbf{w}_I & \mathbf{w}_I \end{smallmatrix}}{\lambda_I} + \dots + \frac{\begin{smallmatrix} (nn) & (mm) \\ \mathbf{w}_{VI} & \mathbf{w}_{VI} \end{smallmatrix}}{\lambda_{VI}}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

gdzie ν jest **współczynnikiem Poissona** w kierunku \mathbf{m} przy rozciąganiu w kierunku \mathbf{n} .

d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4G} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} &= \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_I \cdot \mathbf{m})^2}{\lambda_I} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_{II} \cdot \mathbf{m})^2}{\lambda_{II}} + \dots + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_{VI} \cdot \mathbf{m})^2}{\lambda_{VI}} = \\ &= \frac{\binom{(nm)}{\mathbf{w}_I}^2}{\lambda_I} + \frac{\binom{(nm)}{\mathbf{w}_{II}}^2}{\lambda_{II}} + \dots + \frac{\binom{(nm)}{\mathbf{w}_{VI}}^2}{\lambda_{VI}}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

gdzie G jest **modułem ścinania (modułem Kirchhoffa)**.

Wnioski:

Do modułu sztywności objętościowej (5.26) nie wchodzi stany własne dla których $tr \mathbf{w} = 0$, stany dewiatorowe.

Do modułu Young'a $E(\mathbf{n})$ (5.27) nie wchodzi stany własne, dla których składowa normalna dla kierunku \mathbf{n} jest zerowa $\left(\binom{(nm)}{\mathbf{w}_K} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_K \cdot \mathbf{n} = 0 \right)$.

Do modułu Poissona (5.28) nie wchodzi stany własne dla których albo $\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{m} = 0$ albo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{n} = 0$ $\left(\binom{(mm)}{\mathbf{w}_K} = 0, \binom{(nn)}{\mathbf{w}_K} = 0 \right)$.

Do modułu ścinania (5.29) nie wchodzi stany własne, dla których $\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{n} = 0$ (składowe styczne dla stanów własnych, dla pary kierunków \mathbf{m}, \mathbf{n} są zerowe).

5.3. Tensor stanu granicznego - energetyczne stany własne

Prawo Hooke'a (5.1), które było tematem poprzednich rozważań, opisywało zachowanie sprężyste ciała w otoczeniu stanu naturalnego, tzn. stanu bez naprężeń i odkształceń. Przy założeniu małych odkształceń można było przyjąć, że zależność naprężenie - odkształcenie jest liniowa. Sprężystość objawia się w odwracalności tego prawa.

Granice stosowalności prawa Hooke'a określa warunek stanu granicznego.

Kwadratowy warunek stanu granicznego

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq 1 \quad (5.30)$$

jest uogólnieniem warunku granicznego zaproponowanego przez Mises'a [22] w postaci

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} \leq 1,$$

gdzie \mathbf{s} jest dewiatorem tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$, zaś tensor \mathbf{H} jest tensorem czwartego rzędu zwany *tensorem stanu granicznego*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \sigma \mathbf{1}; \quad 3\sigma = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}).$$

Jeżeli $\boldsymbol{\sigma}^*$ będzie stanem bezpiecznym, to

$$\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = 0. \quad (5.31)$$

Stąd wynika, że $\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{\sigma}^*$ należy do jądra operatora \mathbf{H} .

Warunek Mises'a $\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} \leq 1$ jest warunkiem jaki otrzymujemy z ogólnej postaci (5.30) przy założeniu, że stan hydrostatyczny $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{1}$ jest stanem bezpiecznym (5.31)

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sigma \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{H} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Otrzymujemy wówczas, że

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{s} + \sigma \mathbf{1}) \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{s} + \sigma \mathbf{1}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s}, \quad \text{gdy } \mathbf{H} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Przyjęcie stanu hydrostatycznego za stan bezpieczny jest przeniesieniem założenia z ciał izotropowych na ciała anizotropowe. Założenie to nie ma żadnego fizycznego uzasadnienia w przypadku ciał anizotropowych. Będziemy zatem rozważać warunek stanu granicznego w postaci

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad H_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \leq 1,$$

przy założeniu, że \mathbf{H} ma te same symetrie co \mathbf{S} i \mathbf{C} ze względu na permutacje, oraz że

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \geq 0.$$

Stany bezpieczne będą zależały od przyjętego typu symetrii zewnętrznej \mathbf{H} (symetrii ze względu na automorfizmy $\mathbf{Q} \in \theta$) (4.19).

Poszukując ekstremum wyrażenia $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ na sferze jednostkowej $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 1$ otrzymujemy warunek konieczny na istnienie ekstremum w postaci [35]

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\chi^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - 1) \right) = 0.$$

Stąd wynika, że

$$\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\chi^2} \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.32)$$

Otrzymaliśmy zatem zagadnienie na wartości własne i stany własne dla tensora \mathbf{H} .

Z algebry liniowej, teorii operatorów biliniowych wynika, że tensor \mathbf{H} o założonych symetriach wewnętrznych jako operator liniowy ma sześć rzeczywistych wartości własnych, którym odpowiada sześć rzeczywistych stanów własnych $\boldsymbol{\kappa}_k$.

Przenosząc na tensor \mathbf{H} wszystkie fakty dotyczące tensora sztywności (5.17), przez analogię możemy napisać rozkład spektralny tensora \mathbf{H} , a mianowicie

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\chi_1^2} \mathbf{R}_1 + \dots + \frac{1}{\chi_m^2} \mathbf{R}_m, \quad m \leq 6, \quad (5.33)$$

gdzie $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m$ są tensorami czwartego rzędu, projektorami ortogonalnymi na podprzestrzenie własne $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m$. Spełniają one równość

$$\mathbf{I}^S = \mathbf{R}_1 + \dots + \mathbf{R}_m.$$

Jeżeli \mathcal{R}_k jest podprzestrzenią własną, na którą projektor \mathbf{R}_k rzutuje $\boldsymbol{\sigma}$, to

$$\mathcal{T}_2^S = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_m \quad (\text{suma prosta}).$$

Wielkości $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ są granicznymi wartościami zakresu sprężystości. Jeżeli oznaczymy przez $\boldsymbol{\sigma}_i$ rzut $\boldsymbol{\sigma}$ na \mathcal{R}_i , tzn.

$$\boldsymbol{\sigma}_i \equiv \mathbf{R}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \quad (i - \text{nie sumować}),$$

wówczas z równości

$$\mathbf{I}^S \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} + \dots + \mathbf{R}_m \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

otrzymujemy, że

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_m.$$

Warunek stanu granicznego (5.30) przyjmuje wówczas postać

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1}{\chi_1^2} + \dots + \frac{\boldsymbol{\sigma}_m \cdot \boldsymbol{\sigma}_m}{\chi_m^2} \leq 1, \quad \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j = 0, \quad i \neq j. \quad (5.34)$$

Warunek ten opisuje wnętrze elipsoidy sześciowymiarowej w \mathcal{T}_2^S .

Jeżeli $\chi_i \rightarrow \infty$ wówczas przestrzeń \mathcal{R}_i jest przestrzenią stanów bezpiecznych.

Przyjęcie pewnego stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma}^o$ za stan bezpieczny wymaga dyskusji jaka została przeprowadzona dla stanów pasywnych w zakresie odkształceń sprężystych, [14].

Należy podkreślić, że nie zakładaliśmy żadnej zależności między tensorem sztywności \mathbf{S} (podatności \mathbf{C}) i tensorem stanu granicznego \mathbf{H} .

Wróćmy do ciał izotropowych – materiału izotropowego. Ponad sto lat temu pojawiła się praca Hubera pt.: „Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału” w mało znanym Czasopiśmie Technicznym, XXII, we Lwowie w 1904 roku [11]. W pracy tej autor podał warunek graniczny dla ciał izotropowych w postaci

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \leq 2k^2, \quad (5.35)$$

gdzie „ k ” jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu. Jest to jeden z klasycznych warunków, który leży u podstaw matematycznej teorii plastyczności. Sam autor stał się prekursorem Polskiej Szkoły Mechaniki ciał odkształcalnych. Niezależnie, warunek w tej postaci podali Mises w 1913 roku [21] i Hencky w 1924 roku [10].

Rychlewski zajmując się anizotropowym prawem Hooke’a, dotarł do listu Maxwella [19] pisanym do Thomsona w 1856 roku, w którym Maxwell sformułował warunek podany później przez Hubera. W liście tym Maxwell napisał: „I have strong reason for believing that when $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma - \gamma\alpha - \alpha\beta$ reaches a certain limit = R_2 then element will begin to give way”.

Warunek $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \leq 2k^2$ znany jest w literaturze jako warunek Hubera – Mises’a – Hencky’ego. Rychlewski [33] zaproponował aby nazwać go warunkiem Maxwell’a – Hubera – Mises’a. Warunek ten ma sens energetyczny. Gęstość energii sprężystej dla ciała izotropowego przyjmuje postać

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2K} \sigma^2 + \frac{1}{4G} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}, \quad (5.36)$$

gdzie K – jest modułem sztywności objętościowej (5.26), natomiast G – jest modułem ścinania (5.29).

Z wyrażenia na energię (5.36) wynika, że

$$\phi(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} + \mathbf{s}) = \phi(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{1}) + \phi(\mathbf{s}),$$

tzn., że całkowita energia jest sumą energii zmiany objętości i energii dystorsji – tzn. zmiany kształtu. W sformułowaniu Hubera występuje tylko część energii związana ze zmianą postaci $\phi(\mathbf{s})$.

A zatem warunek graniczny

$$\frac{1}{h} \phi(\mathbf{s}) \leq 1. \quad (5.37)$$

przyjmuje postać warunku Hubera (5.35) dla $h = \frac{k^2}{2G}$. Beltrami [3] jako

warunek graniczny przyjął warunek w postaci ograniczenia na wartość całej energii sprężystej $\phi(\boldsymbol{\sigma})$.

Powstaje jednak pytanie. Jak uogólnić warunek Maxwell’a – Hubera – Mises’a na ciała anizotropowe? Z anizotropowego prawa Hooke’a (5.1) wynika, że wyrażenie na energię $\phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, dla $\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{1} + \mathbf{s}$, przyjmuje postać

$$2\phi = (\sigma \mathbf{1} + \mathbf{s}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\sigma \mathbf{1} + \mathbf{s}) = \sigma^2 \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} + 2\sigma \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} \quad (5.38)$$

i nie jest sumą energii związanej ze zmianą objętości $\sigma^2 \mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{1}$ i energii związanej ze zmianą kształtu $\mathbf{s} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{s}$. Człon $\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{s}$ powoduje, że odpowiedź materiału na naprężenia dewiatorowe jest kulista. Burzyński [5] w 1928 roku proponował obejście tego problemu twierdząc, że nie ma fizycznych powodów, aby energia nie była sumą $\phi(\sigma \mathbf{1})$ i $\phi(\mathbf{s})$. Warunek Burzyńskiego jest równoważny założeniu, że

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} = 0. \quad (5.39)$$

Ciała o tych własnościach nazywamy *objętościowo izotropowymi*. Warunek Burzyńskiego (5.39) nakłada pewne więzy na tensor podatności \mathbf{C} . Liczba niezależnych zmiennych (składowych) tensora \mathbf{C} z 21 redukuje się do 16.

Problem energetycznego warunku granicznego został rozwiązany całościowo w 1984 r. przez Rychlewskiego [33].

STANY ENERGETYCZNIE ORTOGONALNE

Rozpatrujemy przestrzeń tensorów symetrycznych drugiego rzędu \mathcal{T}_2^S , $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ są elementami tej przestrzeni. Zakładamy, że naprężenia odniesione są do pewnego naprężenia charakterystycznego i są wielkościami bezwymiaryowymi, podobnie jak $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Definicja

Dwa stany naprężenia $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ są *energetycznie niezależne*, jeśli energia jest addytywną funkcją tych stanów tzn., że

$$\phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta). \quad (5.40)$$

Ze wzoru na energię (5.3)

$$2\phi = (\alpha + \beta) \cdot C \cdot (\alpha + \beta) = \alpha \cdot C \cdot \alpha + \beta \cdot C \cdot \beta + 2\alpha \cdot C \cdot \beta = \phi(\alpha) + \phi(\beta) + 2\alpha \cdot C \cdot \beta$$

wynika, że musi wówczas być spełniony warunek $\alpha \cdot C \cdot \beta = 0$.

Dla liniowej sprężystości rozdzielność energetyczna oznacza, że naprężenia α nie pracują na deformacjach $C \cdot \beta$ spowodowanych naprężeniami β i na odwrót.

Definicja

Dwa stany naprężenia α i β nazywamy *energetycznie ortogonalnymi*, jeżeli jedno z nich nie pracuje na odkształceniach spowodowanych przez drugie i na odwrót, co oznacza, że

$$\alpha \dot{\perp} \beta \equiv \alpha \cdot C \cdot \beta = 0. \quad (5.41)$$

Dwa stany energetycznie ortogonalne będziemy oznaczać przez $\dot{\perp}$; $\alpha \dot{\perp} \beta$.

Odwzorowanie

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \cdot C \cdot \beta = \beta \cdot C \cdot \alpha$$

jest formą biliniową, symetryczną i dodatnio określoną. Może więc być przyjęte jako definicja iloczynu skalarnego (2.11) zwanego energetycznym

$$\alpha \bullet \beta \equiv \beta \bullet \alpha \equiv \alpha \cdot C \cdot \beta. \quad (5.42)$$

Energia sprężysta dla σ wyraża się wówczas przez energetyczną normę σ , tzn., że

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma \cdot C \cdot \sigma = \frac{1}{2} \sigma \bullet \sigma. \quad (5.43)$$

Każdy rozkład przestrzeni \mathcal{T}_2^S na sumę prostą

$$\mathcal{T}_2^S = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_\kappa,$$

taką, że $\mathcal{E}_\alpha \perp \mathcal{E}_\beta$ dla $\alpha \neq \beta$ (dowolne dwa elementy z różnych podprzestrzeni są energetycznie ortogonalne) nazywamy **rozkładem energetycznie ortogonalnym** przestrzeni \mathcal{T}_2^S dla rozpatrywanego ciała sprężystego.

Dla dowolnego σ zachodzi równość

$$\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_\kappa, \quad \sigma_l \in \mathcal{E}_l, \quad \sigma_\alpha \bullet \sigma_\beta = 0 \quad \text{dla } \alpha \neq \beta$$

i energia sprężysta ϕ daje się rozłożyć na sumę energii

$$\phi(\sigma) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) + \dots + \phi(\sigma_\kappa). \quad (5.44)$$

Takich rozkładów może być wiele.

GLÓWNY ROZKŁAD ENERGII SPRĘŻYSTEJ

TWIERDZENIE 5.3

Dla dowolnego ciała sprężystego, zadanego tensorem podatności \mathbf{C} , istnieje dokładnie jedno rozłożenie energetycznie ortogonalne i ortogonalne przestrzeni \mathcal{T}_2^S

$$\mathcal{T}_2^S = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_\rho, \quad \rho \leq 6$$

takie, że

$$\mathcal{P}_m \perp \mathcal{P}_n \text{ i } \mathcal{P}_m \perp \mathcal{P}_n \quad \text{dla } m \neq n$$

i dokładnie jeden ciąg parami różnych stałych

$$\lambda_1, \dots, \lambda_\rho, \quad \lambda_m \neq \lambda_n \quad \text{dla } m \neq n$$

takich, że

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho,$$

gdzie \mathbf{P}_k jest ortogonalnym projektorem na \mathcal{P}_k , $k=1, 2, \dots, \rho$.

Z rozkładu spektralnego tensora \mathbf{C} wynika, że stany własne odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne, tzn. że

$$\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_l = \delta_{kl}, \quad k \neq l$$

jeżeli

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{w}_k = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k \quad (\text{nie sumować}).$$

Jeżeli równość tę pomnożymy stronami przez \mathbf{w}_l , $l \neq k$ to otrzymamy, że

$$\mathbf{w}_l \cdot \mathbf{w}_k = \mathbf{w}_l \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w}_k = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_l = 0.$$

A zatem stany własne \mathbf{C} są również stanami energetycznie ortogonalnymi. Rozkład energii na sumę energii na stanach własnych tensora \mathbf{C} nazywamy **głównym rozkładem energetycznie ortogonalnym** [33].

Dowolny stan naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ można rozłożyć na elementy podprzestrzeni \mathcal{P}_l

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\rho, \quad \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_l = 0 \quad \text{dla } k \neq l$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}_l = \mathbf{P}_l \cdot \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{P}_l$ jest rzutem $\boldsymbol{\sigma}$ na podprzestrzeń \mathcal{P}_l . Stąd wynika, że

$$(\boldsymbol{\sigma}_l \cdot \boldsymbol{\sigma}_l)^{\frac{1}{2}} = \sigma_l = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_l \cdot \boldsymbol{\sigma})^{\frac{1}{2}}.$$

Energia sprężysta dla $\boldsymbol{\sigma}_l$ wyraża się wówczas wzorem

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}_l) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_l \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_l = \frac{\sigma_l^2}{2\lambda_l}, \quad l=1, 2, \dots, \rho,$$

który otrzymujemy z rozkładu spektralnego tensora \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_1 + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_2 + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho$$

w następujący sposób. Mnożąc przez $\boldsymbol{\sigma}_l$ obie strony równości otrzymujemy, że

$$\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_l = \frac{1}{\lambda_l} \mathbf{P}_l \cdot \boldsymbol{\sigma}_l = \frac{1}{\lambda_l} \boldsymbol{\sigma}_l \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\sigma}_l \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_l = \frac{\sigma_l^2}{\lambda_l}, \quad (\text{be sumowania})$$

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}_l) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_l \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}_l = \frac{\sigma_l^2}{2\lambda_l}.$$

Główny rozkład energii sprężystej odpowiadający rozkładowi przestrzeni \mathcal{T}_2^S na podprzestrzenie własne \mathcal{P}_k dla tensora \mathbf{C} przyjmuje postać

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \phi(\boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\rho) = \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \dots + \phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) = \frac{\sigma_1^2}{2\lambda_1} + \frac{\sigma_2^2}{2\lambda_2} + \dots + \frac{\sigma_\rho^2}{2\lambda_\rho}. \quad (5.45)$$

Wzorem ciał izotropowych można przyjąć, że warunek graniczny (5.34) jest postaci

$$\frac{1}{h_1} \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \frac{1}{h_2} \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \dots + \frac{1}{h_\rho} \phi(\boldsymbol{\sigma}_\rho) = \frac{\sigma_1^2}{k_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{k_2^2} + \dots + \frac{\sigma_\rho^2}{k_\rho^2} \leq 1 \quad (5.46)$$

gdzie $h_\alpha = \frac{k_\alpha^2}{2\lambda_\alpha}$ jest graniczną wartością energii sprężystej dla naprężenia $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$, a mianowicie

$$\frac{1}{h_\alpha} \Phi(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\sigma_\alpha^2}{2\lambda_\alpha} = \frac{1}{k_\alpha^2} \sigma_\alpha^2. \quad (5.47)$$

Przestrzeń \mathcal{P}_α jest przestrzenią stanów bezpiecznych jeśli $k_\alpha \rightarrow \infty$.

Warunek graniczny (5.46) wiąże w pewien sposób własności sprężyste ciała z jego własnościami w stanie granicznym. Tensory \mathbf{S} i \mathbf{H} są wówczas współosiowe.

INTERPRETACJA ENERGETYCZNA WARUNKU MISES'A

Mises [22] proponując warunek graniczny w postaci

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{s} \leq 1$$

podkreślił, że warunek ten nie ma interpretacji energetycznej. Rychlewski dowiódł, że dowolna miara kwadratowa naprężenia $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ma jednoznacznie określony sens energetyczny.

TWIERDZENIE 5.4

Dla dowolnego sprężystego ciała zadanego tensorem podatności \mathbf{C} i tensorem stanu granicznego \mathbf{H} istnieje dokładnie jedno energetycznie ortogonalne rozłożenie przestrzeni T_2^S [33]:

$$T_2^S = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_\nu, \quad \nu \leq 6, \quad \mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l, \quad k \neq l$$

i dokładnie jeden ciąg parami różnych stałych

$$h_1, h_2, \dots, h_\nu; \quad h_m \neq h_n, \quad h_1 < \dots < h_\nu,$$

taki, że dla dowolnego stanu naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\nu, \quad \boldsymbol{\sigma}_l \in \mathcal{H}_l, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{h_1} \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \frac{1}{h_2} \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \dots + \frac{1}{h_\nu} \phi(\boldsymbol{\sigma}_\nu), \end{aligned} \quad (5.48)$$

gdzie

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \phi(\boldsymbol{\sigma}_2) + \dots + \phi(\boldsymbol{\sigma}_\nu) = \phi(\boldsymbol{\sigma}).$$

Rozpatruje się zatem dwie formy kwadratowe dodatnio określone :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma} \geq 0 \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \geq 0.$$

Zakładamy, że operator liniowy \mathbf{L} o symetriach wewnętrznych tensorów \mathbf{C} i \mathbf{H} działający z \mathcal{T}_2^S w \mathcal{T}_2^S , elementowi $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}_2^S$ przyporządkowuje element $\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\alpha}$.

Z definicji energetycznego iloczynu skalarnego wynika, że :

$$\mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = (\mathbf{L} \circ \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\alpha}.$$

Forma biliniowa $\boldsymbol{\alpha} \bullet \mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\beta}$ jest formą symetryczną, ponieważ

$$\boldsymbol{\alpha} \bullet \mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{C} \circ \mathbf{L} \circ \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (5.49)$$

Ma zatem sens zagadnienie na energetyczne stany własne i energetyczne wartości własne

$$\mathbf{L} \bullet \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \boldsymbol{\chi}. \quad (5.50)$$

Istnieje energetycznie ortogonalny ciąg stanów własnych

$$\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_6 \quad \boldsymbol{\chi}_k \bullet \boldsymbol{\chi}_l = \delta_{kl},$$

które odpowiadają rzeczywistym wartościom własnym

$$\frac{1}{2h_1}, \frac{1}{2h_2}, \dots, \frac{1}{2h_6}.$$

Rozkład spektralny dla \mathbf{L} otrzymujemy korzystając z tzw. fundamentalnej tożsamości (5.6).

Jeżeli tensory $\boldsymbol{\eta}_k$ stanowią energetycznie ortogonalną bazę w \mathcal{T}_2^S tzn.

$\boldsymbol{\eta}_k \bullet \boldsymbol{\eta}_l = \delta_{kl}$, to

$$\bigwedge_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}_2^S} \bigvee_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6}^1 \boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \dots + \alpha_6 \boldsymbol{\eta}_6,$$

gdzie $\alpha_k = \boldsymbol{\alpha} \bullet \boldsymbol{\eta}_k$ $\alpha_k \in \mathcal{R}$.

Operator \mathbf{L} jest określony na \mathcal{T}_2^S jeżeli jest określony na bazie $\boldsymbol{\eta}_k$. Wynika to z faktu, że

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{L} \cdot (\alpha_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \dots + \alpha_6 \boldsymbol{\eta}_6) = \alpha_1 \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 + \dots + \alpha_6 \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\eta}_6 = (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 \otimes \boldsymbol{\eta}_1 + \dots + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\eta}_6 \otimes \boldsymbol{\eta}_6) \cdot \boldsymbol{\alpha}.$$

Otrzymujemy ostatecznie, że

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 \otimes \boldsymbol{\eta}_1 + \dots + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\eta}_6 \otimes \boldsymbol{\eta}_6. \quad (5.51)$$

Operatorem tożsamościowym jest tensor $\mathbf{L} = \mathbf{S}$, ponieważ

$$\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{S} \circ \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{I}^S \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}. \quad (5.52)$$

Dla operatora \mathbf{S} fundamentalna tożsamość (5.51) ma postać

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\eta}_1 \otimes \boldsymbol{\eta}_1 + \dots + \boldsymbol{\eta}_6 \otimes \boldsymbol{\eta}_6. \quad (5.53)$$

Równość ta jest spełniona dla dowolnej bazy $\boldsymbol{\eta}_1$.

Jeżeli jako bazę energetycznie orthonormalną w \mathcal{T}_2^S przyjmiemy energetycznie ortogonalne stany własne $\boldsymbol{\eta}_k = \boldsymbol{\chi}_k$ otrzymujemy rozkład spektralny \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2h_1} \boldsymbol{\chi}_1 \otimes \boldsymbol{\chi}_1 + \dots + \frac{1}{2h_6} \boldsymbol{\chi}_6 \otimes \boldsymbol{\chi}_6, \quad (5.54)$$

który jest jednoznaczny dla jednokrotnych wartości $\frac{1}{2h_k}$.

Tensor czwartego rzędu \mathbf{H}_k

$$\mathbf{H}_k \equiv \boldsymbol{\chi}_k \otimes \boldsymbol{\chi}_k \quad (\text{nie sumować})$$

rzutuje energetycznie element $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{T}_2^S$ na podprzestrzeń \mathcal{H}_k

$$\mathbf{H}_k \bullet \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\chi}_k \otimes \boldsymbol{\chi}_k) \bullet \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_k,$$

gdzie

$$\boldsymbol{\alpha}_k = (\boldsymbol{\chi}_k \bullet \boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\chi}_k \in \mathcal{H}_k.$$

Tensor \mathbf{H}_k nazywamy *projektorem energetycznie ortogonalnym*.

Jeżeli energetyczne wartości własne $\frac{1}{2h_k}$ nie są jednokrotne, to energetycznie ortogonalne podprzestrzenie własne \mathcal{H}_k nie są jednowymiarowe. Rozkład spektralny \mathbf{L} (5.54) ma wówczas postać

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2h_1} \mathbf{H}_1 + \frac{1}{2h_2} \mathbf{H}_2 + \dots + \frac{1}{2h_\kappa} \mathbf{H}_\kappa, \quad \kappa \leq 6. \quad (5.55)$$

Warunek Misesa $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ (5.30) można przedstawić w postaci

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\sigma} \bullet (\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \bullet \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.56)$$

Operator \mathbf{L} (5.49) dla warunku Misesa ma zatem postać $\mathbf{L} = (\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S})$.

Z rozkładu spektralnego \mathbf{L} (5.55) wynika, że

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma} \bullet (\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \bullet \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2h_1} \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{H}_1 \bullet \boldsymbol{\sigma} + \dots + \frac{1}{2h_\kappa} \boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{H}_\kappa \bullet \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2h_1} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \frac{1}{2h_\kappa} \boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{\sigma}_\kappa = \\ &= \frac{1}{2h_1} \boldsymbol{\sigma}_1 \bullet \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \frac{1}{2h_\kappa} \boldsymbol{\sigma}_\kappa \bullet \boldsymbol{\sigma}_\kappa = \frac{1}{h_1} \phi(\boldsymbol{\sigma}_1) + \dots + \frac{1}{h_\kappa} \phi(\boldsymbol{\sigma}_\kappa), \end{aligned}$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \dots + \boldsymbol{\sigma}_\kappa$ i $\phi(\boldsymbol{\sigma}_k) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_k \bullet \boldsymbol{\sigma}_k$ (bez sumowania).

A zatem dowolny kwadratowy warunek stanu granicznego można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy z pewnymi wagami energii sprężystych dla energetycznie ortogonalnych części naprężenia.

**WYZNACZANIE WARTOŚCI WŁASNYCH I ENERGETYCZNE
ORTOGONALNYCH STANÓW WŁASNYCH**

Z równości (5.50)

$$(\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \circ \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \boldsymbol{\chi}, \quad \mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{I}^S$$

wynika, że

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \boldsymbol{\chi}.$$

Po nasunięciu z lewej strony tensora \mathbf{C} , ($\mathbf{S} \circ \mathbf{C} = \mathbf{I}^S$) otrzymujemy, że

$$\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2h} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\chi} \quad (5.57)$$

co oznacza, że

$$\left(\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C} \right) \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \Rightarrow (2h\mathbf{H} - \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}.$$

Tensor $\left(\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C} \right)$ jest tensorem osobliwym, tzn. $\det\left(\mathbf{H} - \frac{1}{2h} \mathbf{C} \right) = 0$.

Warunek ten sprowadza się do równania charakterystycznego na h . Po wyznaczeniu energetycznych wartości własnych h_k stany energetycznie ortogonalne $\boldsymbol{\chi}_k$ wyznacza się z równania (5.57).

ZALEŻNOŚCI MIĘDZY TENSORAMI \mathbf{C} I \mathbf{H}

Tensory \mathbf{C} i \mathbf{H} są tensorami czwartego rzędu o tych samych symetriach. Z twierdzenia o rozkładzie spektralnym wynika, że można je przedstawić w postaci (5.18), (5.33)

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{P}_I + \frac{1}{\lambda_2} \mathbf{P}_{II} + \dots + \frac{1}{\lambda_\rho} \mathbf{P}_\rho, \quad \rho \leq 6,$$

gdzie \mathbf{P}_k są projektorami ortogonalnymi na podprzestrzenie własne \mathcal{P}_k oraz

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\chi_1^2} \mathbf{R}_I + \frac{1}{\chi_2^2} \mathbf{R}_{II} + \dots + \frac{1}{\chi_m} \mathbf{R}_m, \quad m \leq 6,$$

gdzie \mathbf{R}_l są projektorami ortogonalnymi na podprzestrzenie własne \mathcal{R}_l .

Podprzestrzenie \mathcal{P}_k i \mathcal{R}_l na ogół są różne.

Twierdzenie o energetycznej interpretacji formy kwadratowej $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ nie zakłada żadnej zależności \mathbf{H} od \mathbf{C} , czyli zależności własności materiału w stanie granicznym od własności materiału w zakresie sprężystym.

W ogólnym przypadku rozkład energii na stany energetycznie ortogonalne różni się od rozkładu na stany własne tensora \mathbf{C} . Stany własne \mathbf{C} są ortogonalne i energetycznie ortogonalne. Na ogół nie zachodzi wynikanie odwrotne.

Lemat

Rozkład na stany energetycznie ortogonalne $\mathcal{T}_2^S = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_m$ jest rozkładem ortogonalnym \equiv jeżeli podprzestrzenie te są inwariantne dla operatora \mathbf{C} .

Dwa tensory \mathbf{A} i $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_4$ nazywamy **zgodnymi** jeżeli istnieje w \mathcal{T}_4^S baza \mathbf{w}_k , $\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_l = \delta_{kl}$, złożona ze stanów własnych tensorów \mathbf{A} i \mathbf{B} , taka, że

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \alpha_2 \mathbf{w}_{II} \otimes \mathbf{w}_{II} + \dots + \alpha_6 \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI},$$

$$\mathbf{B} = \beta_1 \mathbf{w}_I \otimes \mathbf{w}_I + \beta_2 \mathbf{w}_{II} \otimes \mathbf{w}_{II} + \dots + \beta_6 \mathbf{w}_{VI} \otimes \mathbf{w}_{VI}.$$

Należy zauważyć, że niektóre α_k mogą być sobie równe i podobnie β_l .

Równości te mogą zachodzić dla różnych stanów własnych. Podprzestrzenie własne mogą zatem być zupełnie inne.

Jeżeli α_k i β_l są jednokrotne to podprzestrzenie własne są jednowymiarowe i takie same. Tensory \mathbf{A} i \mathbf{B} są wówczas **współosiowe**.

Będą one również nazywane współosiowymi jeżeli dla wielokrotnych wartości własnych będą miały te same podprzestrzenie własne.

Tensorzy \mathbf{A} i \mathbf{B} są *częściowo współosiowe* jeżeli podprzestrzenie własne jednego zawierają się w podprzestrzeniach własnych drugiego.

Jeżeli tensorzy \mathbf{S} i \mathbf{H} są współosiowe to rozkład energetycznie ortogonalny jest ortogonalny.

5.4. Grupy symetrii tensorów czwartego rzędu

Z definicji grupy symetrii dla tensora o dowolnej walencji (4.19) wynika, że dla tensorów czwartego rzędu \mathbf{T} grupa symetrii zdefiniowana jest następująco:

$$O_{\mathbf{T}} = \{Q \in O; \mathbf{Q} * \mathbf{T} = \mathbf{T}\}, \quad (5.58)$$

gdzie \mathbf{Q} jest tensorem ortogonalnym drugiego rzędu (4.2) - automorfizmem trójwymiarowej euklidesowej przestrzeni wektorowej. Generuje on automorfizmy w przestrzeni czterowymiarowej

$$\mathbf{Q} * \mathbf{T} = T^{ijkl} \mathbf{Qe}_i \otimes \mathbf{Qe}_j \otimes \mathbf{Qe}_k \otimes \mathbf{Qe}_l.$$

Tensorami czwartego rzędu są: tensor sztywności \mathbf{S} , tensor podatności \mathbf{C} i tensor stanu granicznego \mathbf{H} . Można zatem rozpatrywać symetrię tych tensorów.

Klasyfikacja materiałów liniowo-sprężystych ze względu na symetrię prowadzi do ośmiu klas symetrii. Podział materiałów liniowo-sprężystych według symetrii nie ma nic wspólnego z krystalografią [39]. Wynika on z własności tensorów euklidesowych symetrycznych czwartego rzędu (z liniowości prawa Hooke'a i własności przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej).

Dwie granicznymi klasami symetrii są:

- pełna anizotropia – brak jakiegokolwiek symetrii - grupa symetrii $O_S^a = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$,
- izotropia – pełna symetria – grupą symetrii jest całkowita grupa $O_S^i = O$.

Pozostałe sześć klas symetrii w kolejności wzrostu symetrii to:

- 1) symetria monokliniczna - symetria pryzmy o podstawie nieregularnej,
- 2) ortotropia - symetria pryzmy o podstawie prostokątnej,
- 3) symetria trygonalna – symetria pryzmy o podstawie foremnej trójkątnej,
- 4) symetria tetragonalna - symetria pryzmy o podstawie kwadratowej,
- 5) symetria transwersalna – symetria cylindryczna,
- 6) symetria kubiczna - symetria sześcianu.

Grup symetrii dla poszczególnych klas materiałów poszukujemy korzystając z rozkładu spektralnego tensora sztywności \mathbf{S} (5.17)

$$\mathbf{S} = \lambda_I \mathbf{P}_I + \dots + \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho \quad \rho \leq 6$$

z którego wynika, że jeżeli $\mathbf{Q} \in O_S$, to

$$\mathbf{Q} * \mathbf{P}_K = \mathbf{P}_K. \quad (5.59)$$

Oznacza to, że grupą symetrii tensora \mathbf{S} jest grupa symetrii zbioru jego projektorów \mathbf{P}_K

$$O_S = O_{P_1} \cap O_{P_2} \cap \dots \cap O_{P_\rho}.$$

Liczba projektorów \mathbf{P}_K zależy od liczby różnych modułów Kelvina. Gdy wszystkie moduły Kelvina są jednokrotnymi pierwiastkami równania charakterystycznego wówczas przestrzenie własne są jednowymiarowe, zaś projektory ortogonalne są postaci

$$\mathbf{P}_K = \boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_K.$$

Warunek (5.59) jest w tym przypadku równoważny warunkowi

$$\mathbf{Q} * (\boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_K) = \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}_K \otimes \mathbf{Q} * \boldsymbol{\omega}_K = (\mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}_K \mathbf{Q}^T) \otimes (\mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}_K \mathbf{Q}^T) = \boldsymbol{\omega}_K \otimes \boldsymbol{\omega}_K.$$

Z ostatniej równości wynika, że $\mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}_K \mathbf{Q}^T = \pm \boldsymbol{\omega}_K$.

Korzystając z podanych warunków symetrii można dla poszczególnych klas symetrii wyprowadzić postać ortogonalnych projektorów \mathbf{P}_K oraz podać dla nich odpowiednią grupę symetrii. Mamy zatem, że [14]

- 1) dla symetrii monoklinicznej $O_{e_1}^m = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}\}$, gdzie \mathbf{e}_1 jest wersorem normalnym do płaszczyzny symetrii, \mathbf{I}_{e_1} jest tensorem ortogonalnym opisującym lustrzane odbicie względem płaszczyzny o wersorze normalnym \mathbf{e}_1 ;
- 2) dla ortotropii $O_S^o = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{I}_{e_2}\}$, gdzie \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 są wersorami normalnymi do płaszczyzn symetrii;
- 3) dla symetrii trygonalnej $O_{e_1}^{3t} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{R}_{e_1}^{k\frac{2\pi}{3}}, \mathbf{I}_{e_2}\}$ ($k=1, 2$), gdzie \mathbf{e}_1 jest kierunkiem osi symetrii, \mathbf{e}_2 normalną do płaszczyzny symetrii prostopadłej do podstawy pryzmy, $\mathbf{R}_{e_1}^\alpha$ ortogonalnym tensorem opisującym obrót wokół kierunku \mathbf{e}_1 o kąt α ;
- 4) dla symetrii tetragonalnej $O_{e_1}^{4t} = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{I}_{e_2}, \mathbf{R}_{e_1}^{k\frac{\pi}{2}}\}$ ($k=1, 2, 3$), gdzie \mathbf{e}_1 jest osią symetrii, zaś $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ są normalnymi do płaszczyzn symetrii;
- 5) dla symetrii transwersalnej $O_{e_1}^tr = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{I}_{e_2}, \mathbf{R}_{e_1}^\varphi\}$ ($\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$), gdzie \mathbf{e}_1 jest osią symetrii, zaś $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ są normalnymi do płaszczyzn symetrii;
- 6) dla symetrii kubicznej $O_{e_1}^c = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{I}_{e_1}, \mathbf{I}_{e_2}, \mathbf{R}_{e_1}^{k\frac{\pi}{2}}, \mathbf{R}_{e_2}^{k\frac{\pi}{2}}\}$ ($k=1, 2, 3$), gdzie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ są kierunkami osi symetrii i są normalnymi do płaszczyzn symetrii.

Ze wzrostem symetrii zmienia się postać pierwszego (5.22) i drugiego (5.23) indeksu strukturalnego. Pierwszy z nich mówi o wymiarach podprzestrzeni własnych, drugi zaś o liczbie parametrów opisujących daną klasę symetrii i ich charakterze.

Materiał o pełnej anizotropii jest opisany przez 21 istotnie różnych parametrów, które redukują się do dwóch dla izotropii.

Rozdział 6. Funkcje tensorowe

6.1. Funkcje tensorowe argumentu tensorowego

W mechanice ośrodków ciągłych na ogół jedne wielkości fizyczne, które mają charakter tensorowy, zależą od innych wielkości fizycznych również o charakterze tensorowym. Zależności te mają charakter funkcji lub funkcyjonałów. I tak na przykład do domknięcia układu równań mechaniki ośrodków ciągłych należy, dla każdego ośrodka, podać związki wiążące stan naprężenia z wielkościami charakteryzującymi deformację. Są to tzw. równania konstytutywne (prawa fizyczne, prawa stanu). Istnieje zatem konieczność budowania funkcji przyporządkowujących jednym tensorom drugim.

W rachunku tensorowym można wprowadzać pojęcie funkcji podobnie jak to się robi w analizie matematycznej.

Jeżeli dany jest zbiór tensorów $D \subset \mathcal{T}_p$ i każdemu tensorowi $\mathbf{X} \in D$ przyporządkowujemy jednoznacznie tensor $\mathbf{Y} \in G \subset \mathcal{T}_q$, to mówimy, że na zbiorze D określona jest funkcja tensorowa argumentu tensorowego

$$f : \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_q$$
$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}). \quad (6.1)$$

Ogólnie można rozpatrywać funkcje tensorowe od wielu zmiennych tensorowych różnego rzędu

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{u}, a). \quad (6.2)$$

Gdy wszystkie tensory są skalarami otrzymujemy, jako przypadek szczególny, zwykłą funkcję rzeczywistą od wielu zmiennych rzeczywistych.

Rozważamy przyporządkowanie

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}; \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n), \quad (6.3)$$

gdzie \mathbf{X} - zmienny tensor, \mathbf{H}_i - tensory parametryczne. W szczególnym przypadku mamy zależność (6.1)

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}).$$

Gdy w przestrzeniach \mathcal{T}_p i \mathcal{T}_q wybrane są polibazy np. polibazy proste, wówczas funkcja tensorowa od argumentu tensorowego jest równoważna układowi 3^q funkcji rzeczywistych od 3^p zmiennych rzeczywistych:

$$Y^{ij \dots mn} = f^{ij \dots mn}(X_{kl \dots r s}), \quad (6.4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= X_{kl \dots r s} \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^r \otimes \mathbf{e}^s \in \mathcal{T}_p, \\ \mathbf{Y} &= Y^{ij \dots mn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n \in \mathcal{T}_q. \end{aligned}$$

Forma powyższej zależności zależy od wybranych baz w \mathcal{T}_p i \mathcal{T}_q oraz od postaci funkcji f .

Szczególne przypadki:

a) Funkcja tensorowa argumentu skalarnego

Gdy

$$\mathbf{Y} = f(x), \quad x \in \mathcal{R} \quad \text{np.} \quad \mathbf{Y} = f(\text{tr} \mathbf{X}) \quad (6.5)$$

mamy do czynienia z funkcją tensorową argumentu skalarnego. Funkcja ta jest równoważna układowi 3^q funkcji rzeczywistych od jednej zmiennej rzeczywistej

$$Y^{ij \dots mn} = f^{ij \dots mn}(x). \quad (6.6)$$

Jako argument skalarny można przyjąć czas t , wówczas

$$Y^{ij \dots mn} = f^{ij \dots mn}(t).$$

W zagadnieniach termodynamicznych jako zmienna stanu występuje temperatura.

b) Funkcja skalarna argumentu tensorowego

Jest to funkcja postaci

$$y = f(\mathbf{X}), \quad (6.7)$$

np. $y = \text{tr} \mathbf{X}$, ($\mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$), $y = \mathbf{X} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{X}$ ($\mathbf{X} \in \mathcal{T}_2$, $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_4$).

Tensor \mathbf{L} jest w tej funkcji tensorem parametrycznym.

Funkcja (6.7) jest równoważna jednej funkcji rzeczywistej od 3^p zmiennych rzeczywistych

$$y = f(X_{k_1 \dots r_s}). \quad (6.8)$$

c) Funkcje tensorowe dla tensorów drugiego rzędu

W przypadku, gdy zarówno wartość funkcji jak również jej argument są tensorami drugiego rzędu

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \text{ dla } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{T}_2, \quad (6.9)$$

rozpatrujemy funkcje, które w mechanice ośrodków ciągłych występują najczęściej.

Między przestrzenią tensorów drugiego rzędu \mathcal{T}_2 i przestrzenią macierzy kwadratowych \mathcal{M}_2 zachodzi izomorfizm, a zatem zależność funkcyjna (6.9) między tensorami drugiego rzędu jest równoważna funkcji macierzowej

$$(Y_i^j) = f_i^j(X_m^n). \quad (6.10)$$

Jest to jednocześnie układ 9 funkcji rzeczywistych od 9 zmiennych rzeczywistych. Przykładami tego typu funkcji są:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^2, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{X},$$

gdzie $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_4$ i jest tensorem parametrycznym.

6.2. Grupy symetrii funkcji tensorowych

Pojęcie grupy symetrii dla tensora zostało wprowadzone już wcześniej w rozdziale 4 (4.19).

A zatem możemy określić grupę symetrii dla tensora $\mathbf{X} \rightarrow O_X$ i grupę symetrii dla tensora $\mathbf{Y} \rightarrow O_Y$. Są to tensory ortogonalne spełniające warunki:

$$O_X = \{\mathbf{Q} \in O; \mathbf{Q} * \mathbf{X} = \mathbf{X}\}, \quad (6.11)$$

$$O_Y = \{\mathbf{Q} \in O; \mathbf{Q} * \mathbf{Y} = \mathbf{Y}\}.$$

Definicja

Grupą symetrii funkcji (6.1)

$$f : \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_q$$

nazywamy zbiór tensorów ortogonalnych O_f

$$O_f = \{\mathbf{Q} \in O; \mathbf{Q} * f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Q} * \mathbf{X})\}. \quad (6.12)$$

Innymi słowy, do grupy symetrii funkcji f należą takie tensory ortogonalne, które powodują, że wynik działania funkcji na odwzorowanym przy ich pomocy argumencie jest taki sam jak wynik odwzorowanej przy ich pomocy wartości funkcji. Grupy symetrii funkcji nie należy mylić z grupami symetrii wartości funkcji.

Jeżeli

$$f : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2,$$

wówczas do grupy symetrii funkcji należą tensory ortogonalne spełniające warunek

$$O_f = \{\mathbf{Q} \in O; \mathbf{Q}f(\mathbf{X})\mathbf{Q}^T = f(\mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{Q}^T)\}.$$

Jeżeli $O_f = O$, funkcja f jest **funkcją izotropową**, jeżeli $O_f = \mathcal{R}$ funkcja f jest **funkcją hemitropową**. W pozostałych przypadkach funkcję f nazywamy anizotropową.

Funkcjami izotropowymi są np. funkcje

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}^2, \quad \mathbf{Y} = \text{tr}\mathbf{X}.$$

Przykładem funkcji anizotropowej jest prawo Hooke'a $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\sigma}$.

ZASADY CURIE

Każdą funkcję można interpretować jako prawo, jej argument jest wówczas przyczyną, zaś jej wartość skutkiem.

Gdy funkcja f jest funkcją izotropową, wówczas jej skutek jest nie mniej symetryczny niż przyczyna

$$O_X \subset O_Y \subset O. \quad (6.13)$$

Gdy funkcja f jest funkcją izotropową i wzajemnie jednoznaczna, wówczas skutek jest tak samo symetryczny jak przyczyna

$$O_X = O_Y.$$

W ogólnym przypadku, gdy $O_X \neq O$, wówczas zachodzi następująca zależność

$$O_X \cap O_f \subset O_Y. \quad (6.14)$$

Oznacza to, że skutek jest nie mniej symetryczny niż symetria prawa i przyczyny.

Fakty powyższe znane są w literaturze jako zasady Curie, [34].

Definicja

Funkcję tensorową

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}; \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n), \quad \mathbf{H}_i \in \mathcal{T}_2 \quad (6.15)$$

nazywamy izotropową, gdy tensory \mathbf{H}_i są postaci $\mathbf{H}_i = h_i \mathbf{1}$.

Definicja

Funkcję tensorową

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}; \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n)$$

nazywamy izotropową, gdy ma ona tę samą postać we wszystkich układach, tzn., że

$$\mathbf{Y}^* = f(\mathbf{X}^*; \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_n).$$

Obie definicje są równoważne.

6.3. Podstawowe twierdzenia o reprezentacji funkcji tensorowych izotropowych

TWIERDZENIE 6.1

Funkcja skalarna argumentu tensorowego (6.7) jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy może być przedstawiona w postaci funkcji trzech niezmienników podstawowych swego argumentu, tzn., że funkcja izotropowa

$$y = f(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \mathcal{T}_2^S$$

przyjmuje postać

$$y = f(I_X, II_X, III_X), \quad (6.16)$$

gdzie I_X, II_X, III_X są niezmiennikami tensora \mathbf{X} (3.28). Wynika to z faktu, że dla funkcji izotropowej postać funkcji we wszystkich układach jest taka sama.

W ogólnym przypadku można rozpatrywać funkcje skalarne od więcej niż jednego argumentu tensorowego.

TWIERDZENIE 6.2

Funkcja skalarna od dwóch argumentów tensorowych drugiego rzędu

$$y = f(\mathbf{X}; \mathbf{Z}), \mathbf{X}, \mathbf{Z} \in \mathcal{T}_2^S \quad (6.17)$$

jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy może być przedstawiona w postaci

$$y = f(I_X, II_X, III_X; I_Z, II_Z, III_Z; I_{XZ}, II_{XZ}, III_{XZ}, IV_{XZ}), \quad (6.18)$$

gdzie niezmienniki wspólne dla tensorów \mathbf{X} i \mathbf{Z} są zdefiniowane następująco:

$$I_{XZ} = \text{tr}\mathbf{XZ}, \quad II_{XZ} = \text{tr}\mathbf{X}^2\mathbf{Z}, \quad III_{XZ} = \text{tr}\mathbf{XZ}^2, \quad IV_{XZ} = \text{tr}\mathbf{X}^2\mathbf{Z}^2. \quad (6.19)$$

Liczba zmiennych niezależnych w (6.17) redukuje się wówczas do 10 niezmienników podstawowych tensorów \mathbf{X} i \mathbf{Z} .

Powyższe dwa twierdzenia mają ważne znaczenie w mechanice ośrodków ciągłych. Korzysta się z nich np. przy formułowaniu warunków granicznych dla ciał izotropowych.

Istotną rolę w mechanice ośrodków ciągłych odgrywają funkcje tensorowe, których zbiorem argumentów i wartości są tensory symetryczne drugiego rzędu

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \text{ dla } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_2^S. \quad (6.20)$$

Z definicji potęgi tensora (3.33) wynika, że dowolna potęga tensora drugiego rzędu jest z nim współosiowa. Tensor \mathbf{X}^n jest współosiowy z tensorem \mathbf{X} , przy czym w układzie osi głównych tensory te mają postać:

$$(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} X_I & 00 \\ 0X_{II} & 0 \\ 00X_{III} \end{pmatrix} - (\mathbf{X}^n) = \begin{pmatrix} X_I^n & 00 \\ 0X_{II}^n & 0 \\ 00X_{III}^n \end{pmatrix}.$$

Dla tensorów drugiego rzędu zachodzi wzór Cayley-Hamiltona (3.33)

$$\mathbf{X}^3 = I_X \mathbf{X}^2 + II_X \mathbf{X} + III_X \mathbf{1},$$

który pozwala wyrazić dowolną potęgę tensora \mathbf{X}^n przez \mathbf{X}^2 , \mathbf{X} i $\mathbf{1}$ ze współczynnikami zależnymi od niezmienników tensora $\mathbf{X} - I_X, II_X, III_X$.

TWIERDZENIE 6.3

Funkcja tensorowa

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \text{ dla } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_2^S.$$

jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy może być przedstawiona w postaci tensorowego trójmianu kwadratowego

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + k_1 \mathbf{X} + k_2 \mathbf{X}^2, \quad (6.21)$$

gdzie współczynniki k_0, k_1, k_2 są funkcjami trzech podstawowych niezmienników tensora $\mathbf{X} - I_X, II_X, III_X$ lub jego wartości głównych X_I, X_{II}, X_{III} . Twierdzenie to jest konsekwencją twierdzenia Cayley-Hamiltona w przypadku funkcji izotropowych rozwijalnych w szeregi. Funkcja (6.21) jest określona jeżeli dana jest postać trzech funkcji skalarnych k_0, k_1, k_2 .

Twierdzenie to jest zasadniczym momentem całej teorii funkcji izotropowych.

Podobnie jak dla funkcji skalarnych argumentu tensorowego tak również dla funkcji tensorowych drugiego rzędu można rozpatrywać funkcje od więcej niż jednej zmiennej.

TWIERDZENIE 6.4

Funkcja tensorowa

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \text{ dla } \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_2^S \quad (6.22)$$

jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy może być przedstawiona w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} = & a_0 \mathbf{1} + b_1 \mathbf{X} + b_2 \mathbf{Z} + c_1 \mathbf{X}^2 + c_2 (\mathbf{XZ} + \mathbf{ZX}) + c_3 \mathbf{Z}^2 + d_1 (\mathbf{X}^2 \mathbf{Z} + \mathbf{ZX}^2) \\ & + d_2 (\mathbf{XZ}^2 + \mathbf{Z}^2 \mathbf{X}) + e_1 (\mathbf{X}^2 \mathbf{Z}^2 + \mathbf{Z}^2 \mathbf{X}^2), \end{aligned} \quad (6.23)$$

gdzie: $a_0, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, e_1$ są funkcjami od 10 niezmienników tensorów \mathbf{X} i \mathbf{Z} i niezmienników (6.19).

Funkcje tensorowe izotropowe możemy tworzyć korzystając z najprostszych działań algebry takich jak mnożenie tensorów przez liczbę, dodawanie, potęgowanie:

$$\mathbf{Y} = k\mathbf{X},$$

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + k_1 \mathbf{X},$$

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + k_1 \mathbf{X} + k_2 \mathbf{X}^2,$$

.....,

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + k_1 \mathbf{X} + \dots\dots\dots k_n \mathbf{X}^n.$$

Dochodzimy w ten sposób do idei szeregu potęgowego

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{\infty} k_i \mathbf{X}^i. \quad (6.24)$$

Uwaga: Szeregi mają sens tylko wówczas, gdy każdy z 9 szeregów dla składowych jest zbieżny.

W ten sposób mamy możliwość uogólnienia rozwijalnych w szeregi funkcji elementarnych jednej zmiennej na tensory. Na przykład, dla funkcji wykładniczej

$$y = f(x) = e^x = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

możemy napisać, że

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = e^{\mathbf{X}} = \mathbf{1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^i}{i!}. \quad (6.25)$$

Symbol f będzie dalej oznaczał wyjściową funkcję np. $\sin(\cdot)$, $\sqrt{(\cdot)}$, $\ln(\cdot)$.

TWIERDZENIE 6.5

Osie główne tensora \mathbf{Y} będącego funkcją izotropową tensora \mathbf{X} pokrywają się z osiami głównymi tensora \mathbf{X} , przy czym jeżeli

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) \text{ dla } \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_2,$$

to wartości główne tych tensorów związane są związkami

$$Y_I = f(X_I), Y_{II} = f(X_{II}), Y_{III} = f(X_{III}).$$

Uwaga:

- Twierdzenie jest słuszne oczywiście tylko wówczas, gdy osie główne istnieją,
- Nie należy sądzić, że w układzie osi nie głównych mają miejsce np. związki:

$$Y_{12} = f(X_{12}), \quad Y_{12} = e^{12} \text{ i inne tego typu.}$$

Gdy szereg tensorowy jest uogólnieniem funkcji elementarnej takiej jak $e^{(\cdot)}$, $\ln(\cdot)$, $\sin(\cdot)$ to współczynniki w szeregu k_i są liczbami.

Dla tensorów możemy wprowadzić szeregi ogólniejsze w postaci

$$\mathbf{Y} = k_0(X_I, X_{II}, X_{III})\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{\infty} k_i(X_I, X_{II}, X_{III})\mathbf{X}^i, \quad (6.26)$$

które odpowiadają funkcjom izotropowym postaci:

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}, X_I, X_{II}, X_{III}).$$

6.4. Wzór Sylwestra-Lagrange'a

Dane są trzy dowolne funkcje:

$$\phi(X_I, X_{II}, X_{III}), \quad \psi(X_I, X_{II}, X_{III}), \quad \chi(X_I, X_{II}, X_{III}).$$

Funkcja

$$f(t) = f(t, X_I, X_{II}, X_{III}) = \frac{(t - X_{II})(t - X_{III})}{(X_I - X_{II})(X_I - X_{III})} \phi + \frac{(t - X_{III})(t - X_I)}{(X_{II} - X_{III})(X_{II} - X_I)} \psi + \frac{(t - X_I)(t - X_{II})}{(X_{III} - X_I)(X_{III} - X_{II})} \chi$$

ma następującą własność

$$\begin{aligned} f(X_I; X_I, X_{II}, X_{III}) &= \phi(X_I, X_{II}, X_{III}), \\ f(X_{II}; X_I, X_{II}, X_{III}) &= \psi(X_I, X_{II}, X_{III}), \\ f(X_{III}; X_I, X_{II}, X_{III}) &= \chi(X_I, X_{II}, X_{III}). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Stąd wynika, że funkcja tensorowa izotropowa

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X}) = \frac{(\mathbf{X} - X_{II}\mathbf{1})(\mathbf{X} - X_{III}\mathbf{1})}{(X_I - X_{II})(X_I - X_{III})} \phi + \frac{(\mathbf{X} - X_{III}\mathbf{1})(\mathbf{X} - X_I\mathbf{1})}{(X_{II} - X_{III})(X_{II} - X_I)} \psi + \frac{(\mathbf{X} - X_I\mathbf{1})(\mathbf{X} - X_{II}\mathbf{1})}{(X_{III} - X_I)(X_{III} - X_{II})} \chi \quad (6.28)$$

mająca w osiach głównych postać:

$$\begin{aligned} Y_I &= \phi(X_I, X_{II}, X_{III}), \\ Y_{II} &= \psi(X_I, X_{II}, X_{III}), \\ Y_{III} &= \chi(X_I, X_{II}, X_{III}) \end{aligned} \quad (6.29)$$

przeprowadza wartości główne tensora \mathbf{X} w wartości główne tensora \mathbf{Y} według z góry zadanego prawa dla każdej wartości Y_I, Y_{II}, Y_{III} (6.27).

Wniosek ten ma zasadnicze znaczenie dla eksperymentatora. Istotnie, wystarczy stwierdzić, że tensory \mathbf{X} i \mathbf{Y} są związane zależnością izotropową i że związki Y_I, Y_{II}, Y_{III} z X_I, X_{II}, X_{III} mają wykrytą w doświadczeniu postać, aby wykorzystując podany wzór wypisać związek tensorowy słuszny w dowolnym układzie.

Podany wzór (6.28) nosi nazwę **wzoru Sylwestra-Lagrange`a**.

Wzór Sylwestra-Lagrange`a można wykorzystać do wykrycia zależności współczynników k_0, k_1, k_2 od niezmienników tensora \mathbf{X} we wzorze (6.21)

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + k_1 \mathbf{X} + k_2 \mathbf{X}^2$$

jeżeli zadany jest kształt funkcji $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$.

Bezpośrednie rozwinięcie funkcji w szereg (o ile jest rozwijalna) i wykorzystanie wzoru Cayley-Hamiltona prowadzi do skomplikowanych rachunków. Wykorzystując natomiast wzór Sylwestra-Lagrange`a, po uporządkowaniu wyrazów przy odpowiednich potęgach tensora otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{X_{II} X_{III} f(X_I)}{(X_I - X_{II})(X_I - X_{III})} + \frac{X_{III} X_I f(X_{II})}{(X_{II} - X_{III})(X_{II} - X_I)} + \frac{X_I X_{II} f(X_{III})}{(X_{III} - X_I)(X_{III} - X_{II})}, \\ -k_1 &= \frac{(X_{II} + X_{III})f(X_I)}{(X_I - X_{II})(X_I - X_{III})} + \frac{(X_{III} + X_I)f(X_{II})}{(X_{II} - X_{III})(X_{II} - X_I)} + \frac{(X_I + X_{II})f(X_{III})}{(X_{III} - X_I)(X_{III} - X_{II})}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$k_2 = \frac{f(X_I)}{(X_I - X_{II})(X_I - X_{III})} + \frac{f(X_{II})}{(X_{II} - X_{III})(X_{II} - X_I)} + \frac{f(X_{III})}{(X_{III} - X_I)(X_{III} - X_{II})}.$$

Z faktu, że między niezmiennikami i wartościami głównymi tensora \mathbf{X} zachodzą zależności

$$\begin{aligned} I_X &= X_I + X_{II} + X_{III}, & II_X &= -(X_I X_{II} + X_{II} X_{III} + X_{III} X_I), \\ III_X &= X_I X_{II} X_{III} \end{aligned} \quad (6.31)$$

wynika, że współczynniki k_0, k_1, k_2 można również wyrazić przez niezmienniki.

Postępowanie powyższe ma znaczenie dla praktyki przy wykrywaniu postaci związków konstytutywnych.

EFEKTY POYNTINGA I KELVINA

W mechanice ośrodków ciągłych bardzo istotną rolę odgrywa tensorowy trójmian kwadratowy (6.21)

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + k_1 \mathbf{X} + k_2 \mathbf{X}^2 \quad (6.32)$$

dla tensorów drugiego rzędu symetrycznych, tzn. gdy $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_2^s$.

Równanie tensorowe (6.32) jest wówczas równoważne układowi sześciu równań skalarnych na składowe

$$Y^i_j = k_0 \delta^i_j + k_1 X^i_j + k_2 X^i_m X^m_j$$

w przypadku, gdy

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= Y^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, \\ \mathbf{X} &= X^m_n \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n. \end{aligned}$$

Każdy z tensorów \mathbf{X}, \mathbf{Y} można rozłożyć na część kulistą i część dewiatorową

$$\mathbf{X} = \frac{I_X}{3} \mathbf{1} + \mathbf{D}^X, \quad \mathbf{Y} = \frac{I_Y}{3} \mathbf{1} + \mathbf{D}^Y \quad (6.33)$$

i zastąpić wyjściowy związek tensorowy przez dwa równania:

- zależność skalarną między śladami tensorów \mathbf{X} i \mathbf{Y}

$$tr\mathbf{Y} = 3k_0 + k_1 tr\mathbf{X} + k_2 tr\mathbf{X}^2 \quad (6.34)$$

$$I_Y = 3k_0 + k_1 I_X + k_2 (2II_X + I_X^2)$$

- oraz zależność tensorową między ich dewiatorami

$$\mathbf{D}^Y = (k_1 + 2k_2)\mathbf{D}^X + k_2 \left\{ (\mathbf{D}^X)^2 - \left(\frac{2}{9} I_X^2 + \frac{2}{3} II_X \right) \mathbf{1} \right\}. \quad (6.35)$$

Teorie, w których $k_2 \neq 0$ są nazywane teoriami **tensorowo-nieliniowymi**. Uwzględniają one tzw. efekty drugiego rzędu.

W całym szeregu teorii należy postawić w (6.32) warunek

$$\mathbf{Y} = \mathbf{0} \text{ dla } \mathbf{X} = \mathbf{0}, \text{ tzn., że } f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

z którego wynika, że zachodzi równość

$$k_0(0,0,0) = 0.$$

Nawet w tym przypadku, gdy tensor \mathbf{X} jest dewiatorem ($tr\mathbf{X} = 0$) tensor \mathbf{Y} może mieć część kulistą ($tr\mathbf{Y} \neq 0$). Ze związku między częściami kulistymi tych tensorów (6.34) wynika, że

$$I_Y = 2k_2 II_X. \quad (6.36)$$

Taką sytuację nazywamy **efektem Poyntinga**.

Gdy $k_2 = 0$ tensorowy trójmian kwadratowy (6.32) przyjmuje postać

$$\mathbf{Y} = k_0 \mathbf{1} + k_1 \mathbf{X} \quad (6.37)$$

i jest związkiem **tensorowo liniowym**. Ze względu na zależność współczynników k_0, k_1 od niezmienników tensora \mathbf{X} jest on jednak w dalszym ciągu związkiem nieliniowym od składowych tensora \mathbf{X} . Taki związek nazywamy **quasiliniowym**.

W tym przypadku między częściami kulistymi i dewiatorami tensorów \mathbf{X}, \mathbf{Y} zachodzą zależności (6.34), (6.35)

$$I_Y = 3k_0 + k_1 I_X, \quad (6.38)$$

$$\mathbf{D}^Y = k_1 \mathbf{D}^X. \quad (6.39)$$

TWIERDZENIE 6.6

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby zależność między tensorami była quasiliniowa jest podobieństwo ich dewiatorów (6.39).

Twierdzenie to ma ważne znaczenie dla zastosowań. W badaniach eksperymentalnych wystarczy sprawdzić, że zachodzi związek

$$\mu^Y = \mu^X, \quad (\mu - \text{parametr Lode`go}) \quad (6.40)$$

aby pokazać, że związek fizyczny jest quasiliniowy.

Parametr Lode`go dla tensora \mathbf{Y} jest zdefiniowany następująco

$$\mu^Y = \frac{(D^Y_{II} - D^Y_I) + (D^Y_{II} - D^Y_{III})}{D^Y_I - D^Y_{III}} = 2 \frac{Y_{II} - Y_{III}}{Y_I - Y_{III}} - 1.$$

Analogicznie parametr Lode`go definiuje się dla tensora \mathbf{X} .

Można pokazać, że jeżeli parametry Lode`go dla dwóch tensorów są sobie równe (6.40), wówczas spełnione są równości

$$\frac{D^Y_I}{D^X_I} = \frac{D^Y_{II}}{D^X_{II}} = \frac{D^Y_{III}}{D^X_{III}} = k_1$$

tzn., że zachodzi podobieństwo dewiatorów i związek fizyczny jest quasiliniowy.

Jeżeli w związku quasiliniowym (6.37) ($k_2 = 0$) współczynnik $k_0 = k_0(I_X, II_X, III_X)$ zależy od niezmienników tensora \mathbf{X} , wówczas może zajść sytuacja, że dla $I_X = 0$ mamy z (6.38)

$$I_Y = 3k_0(0, II_X, III_X) \neq 0. \quad (6.41)$$

Sytuację taką nazywamy *efektem Kelvina*.

TWIERDZENIE 6.7

Związek tensorowy $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$ jest liniowy i jednorodny ze względu na składowe tensora \mathbf{X} wtedy i tylko wtedy, gdy w (6.34) i (6.35)

$$k_0 = cI_X, \quad c = \text{const}, \quad k_1 = \text{const}, \quad k_2 = 0.$$

Związek o tej postaci zapisuje się zwykle w składowych jako

$$Y_{ij} = \lambda \text{tr} \mathbf{X} \delta_{ij} + 2\mu X_{ij}, \quad \lambda, \mu = \text{const}. \quad (6.42)$$

Jest to najprostsza możliwa zależność izotropowa między dwoma tensorami.

Przykład:

Jeżeli przyjmujemy, że

$$Y_{ij} = \sigma_{ij}, X_{ij} = \varepsilon_{ij}$$

to otrzymujemy prawo Hooke'a (5.1) liniowej sprężystości dla ciał izotropowych.

Nasze rozważania dotyczyły funkcji tensorowej jednego argumentu tensorowego. W zastosowaniach musimy uzależnić niekiedy tensor \mathbf{Y} od kilku tensorów \mathbf{X}_i , np. tensor naprężenia zależy od tensora deformacji, tensora prędkości deformacji oraz innych tensorów nie mających charakteru mechanicznego.

Jest zatem sens rozpatrywać funkcje tensorowe postaci

$$\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_k; \mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \dots, \mathbf{H}_m),$$

gdzie \mathbf{H}_i tensory parametryczne.

Można pokazać, że jeżeli wszystkie tensory są symetryczne, to niezależnych tensorów może być tylko 6, a niezależnych dewiatorów tylko 5.

6.5. Funkcje tensorowe potencjalne

Funkcję izotropową

$$\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$$

nazywamy *potencjalną*, jeżeli istnieje funkcja skalarna W od niezmienników tensora \mathbf{X} - I_X, II_X, III_X taka, że

$$Y_{ij} = \frac{\partial W}{\partial X_{ij}} \quad (6.43)$$

Funkcję skalarną $W = W(I_X, II_X, III_X)$ nazywamy *potencjałem*.

Wykonując różniczkowanie potencjału po składowych tensora \mathbf{X} otrzymujemy następujące wyrażenie

$$Y_{ij} = \frac{\partial W}{\partial X_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_X} \frac{\partial I_X}{\partial X_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial II_X} \frac{\partial II_X}{\partial X_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial III_X} \frac{\partial III_X}{\partial X_{ij}}.$$

Po wykorzystaniu wzorów na pochodne niezmienników tensora \mathbf{X} po jego składowych

$$\frac{\partial I_X}{\partial X_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial II_X}{\partial X_{ij}} = X_{ij} - I_X \delta_{ij}, \quad \frac{\partial III_X}{\partial X_{ij}} = X_{im} X_{mj} - I_X X_{ij} - II_X \delta_{ij} \quad (6.44)$$

funkcję potencjalną (6.43) sprowadza się do tensorowego trójmianu kwadratowego

$$\mathbf{Y} = \left(\frac{\partial W}{\partial I_X} - I_X \frac{\partial W}{\partial II_X} - II_X \frac{\partial W}{\partial III_X} \right) \mathbf{1} + \left(\frac{\partial W}{\partial II_X} - I_X \frac{\partial W}{\partial III_X} \right) \mathbf{X} + \frac{\partial W}{\partial III_X} \mathbf{X}^2. \quad (6.45)$$

W tym tensorowym trójmianie kwadratowym współczynniki k_0, k_1, k_2 zależą tylko od jednej funkcji skalarnej W . Jest to zatem przypadek szczególny ogólnej postaci tensorowego trójmianu kwadratowego (6.32).

Gdy potencjał nie zależy od trzeciego niezmiennika, to powyższy związek tensorowy jest związkiem quasiliniowym. Taka sytuacja ma miejsce, gdy rozpatrujemy stowarzyszone prawo płynięcia dla warunku plastyczności Hubera-Misesa.

Rozdział 7. Pola tensorowe

7.1. Pola skalarne, wektorowe i tensorowe

Przestrzeń euklidesowa punktowa jest jednym z podstawowych modeli matematycznych przestrzeni fizycznej – formy bytu materii. Model ten jest fundamentem fizyki klasycznej. Podstawowym narzędziem mechaniki ośrodków ciągłych są pola tensorowe na podobszarach przestrzeni euklidesowej. Pojęcie przestrzeni euklidesowej wektorowej \mathfrak{E}_n było już wprowadzone wcześniej (patrz Rozdział 2. Struktury algebraiczne). Jest to przestrzeń liniowa nad ciałem liczb rzeczywistych, której elementami są wektory z dodatkową operacją iloczynu skalarnego. Wprowadziliśmy również przestrzeń euklidesową punktową \mathcal{E}_n , jako zbiór związany z \mathfrak{E}_n przez zadane odwzorowanie

$$\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \rightarrow \mathfrak{E}_n;$$

$$(A, B) \in \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \mathfrak{E}_n.$$

Odwzorowanie to spełnia następujące aksjomaty:

$$\bigwedge_{A, B \in \mathcal{E}_n} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\bigwedge_{A, B, C \in \mathcal{E}_n} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\bigwedge_{O \in \mathcal{E}_n} \bigwedge_{X \in \mathcal{E}_n} \bigvee_{\mathbf{x} \in \mathfrak{E}_n} \overrightarrow{OX} = \mathbf{x},$$

gdzie \mathbf{x} – promień wektor punktu X względem wybranego punktu O .

Obierając w \mathcal{E}_n punkt O można zdefiniować jedno-jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy punktami z \mathcal{E}_n a wektorami ze stowarzyszonej przestrzeni \mathfrak{E}_n

$${}_O\varphi : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathfrak{E}_n, \quad {}_O\varphi(X) = \overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$$

$${}_O\varphi^{-1} : \mathfrak{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_n, \quad {}_O\varphi^{-1}(\mathbf{x}) = O + \mathbf{x} = X.$$
(7.1)

Punkt O nazywamy początkiem w \mathcal{E}_n przy odwzorowaniu ${}_o\varphi$. Wektor ${}_o\varphi(X) = \overrightarrow{OX} = \mathbf{x}$ nazywamy promień wektorem (promieniem wodzącym) punktu X przy odwzorowaniu ${}_o\varphi$.

Przestrzeń \mathcal{E}_n nie jest przestrzenią liniową. Można jednak przenieść do niej struktury przestrzeni wektorowej jako odpowiednie operacje na promieniach wodzących. Struktura ta zależy wyboru punktu O . Ostatni symbol dodawania w (7.1) nie jest dodawaniem w zwykłym sensie. Sumowanie to oznacza, że punkt O jest początkiem wektora \mathbf{x} , zaś jego końcem jest punkt X .

Reperem w przestrzeni punktowej \mathcal{E}_n stowarzyszonej z \mathfrak{A}_n nazywamy każdą parę (O, \mathbf{e}_i) , gdzie $O \in \mathcal{E}_n$, $\mathbf{e}_i \in \mathfrak{A}_n$. Punkt O jest punktem zaczepienia repera, zaś wektory \mathbf{e}_i są bazą w \mathfrak{A}_n .

Baza \mathbf{e}_i jest ortonormalna, gdy $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Wektory bazy są wzajemnie ortogonalne.

W mechanice ośrodków ciągłych przyjmuje się, że przestrzeń fizyczna jest modelowana trójwymiarową punktową przestrzenią euklidesową \mathcal{E}_3 z reperem (O, \mathbf{e}_i) ($i=1,2,3$).

Przestrzeń euklidesową punktową \mathcal{E}_3 definiuje się czasem jako zbiór $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, gdzie \mathcal{R} jest ciałem liczb rzeczywistych.

Wybierając w \mathfrak{A}_3 bazę ortonormalną \mathbf{i}_k ($\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl}$) otrzymujemy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie

$$\begin{aligned} {}_{i_k}\psi : \mathfrak{A}_3 &\rightarrow \mathcal{R}^3 \\ {}_{i_k}\psi(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_3). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Odwzorowanie

$$\Phi = {}_{i_k}\psi \circ {}_o\varphi : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{R}^3 \quad (7.3)$$

jest izomorfizmem \mathcal{E}_3 w \mathcal{R}^3 zależnym od repera (O, \mathbf{i}_k) względem struktur przeniesionych z \mathfrak{A}_3 .

Należy starannie odróżniać przestrzeń punktową od przestrzeni wektorowej i obie od przestrzeni liczbowej.

Definicja

Polem tensorowym na podzbiorze $D \subset \mathcal{E}_3$ nazywamy odwzorowanie

$$f : D \rightarrow \mathcal{T}_q, \quad (7.4)$$

$$X \in D \Rightarrow f(X) \in \mathcal{T}_q.$$

Odwzorowanie to przyporządkowuje w sposób jednoznaczny punktowi X należącemu do obszaru D tensorowi rzędu q .

Polem tensorowym nazywamy zatem funkcję tensorową określoną na podzbiorze przestrzeni euklidesowej punktowej \mathcal{E}_3 .

W szczególności mamy :

$$f(X) = \varphi(X) \in \mathcal{R} \quad \text{pole skalarne,}$$

$$f(X) = \mathbf{v} \in \mathfrak{D}_3 \quad \text{pole wektorowe,}$$

$$f(X) = T \in \mathcal{T}_2 \quad \text{pole tensorowe o walencji 2.}$$

Przykładem pola tensorowego o walencji 1- pola wektorowego na \mathcal{E}_3 jest pole promienia wodzącego z O . Jest to odwzorowanie $\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathfrak{D}_3$.

Jedno-jednoznaczna zależność między punktami z \mathcal{E}_3 a wektorami z \mathfrak{D}_3 (7.1) ustalona poprzez przyjęcie początku w \mathcal{E}_3 pozwala każdemu polu tensorowemu na przestrzeni punktowej przyporządkować funkcję tensorową argumentu wektorowego

$$f \circ \varphi^{-1} : \mathfrak{D}_3 \rightarrow \mathcal{T}_q.$$

7.2. Układy współrzędnych kartezjańskich w \mathcal{E}_3

W zastosowaniach mechaniki ośrodków ciągłych pewne informacje dotyczące wielkości tensorowych uzyskujemy w postaci liczbowej. A zatem na pewnym etapie naszych rozważań jesteśmy zmuszeni do pewnej arytmetyzacji teorii. W przestrzeniach tensorowych \mathcal{T}_q uzyskiwaliśmy taką arytmetyzację wprowadzając bazy. W odpowiednich polibazach tensory punktowe były reprezentowane układem 3^q liczb.

Arytmetyzację opisu podzbiorów w \mathcal{E}_3 i pól tensorowych na \mathcal{E}_3 uzyskujemy wprowadzając w \mathcal{E}_3 układy współrzędnych.

W przestrzeni euklidesowej punktowej \mathcal{E}_3 można zawsze wprowadzić absolutny układ prostokątnych współrzędnych kartezjańskich. Przestrzeń fizyczna modelowana przestrzenią euklidesową punktową jest ponadto przestrzenią jednorodną i izotropową. **Jednorodność** przestrzeni jest równoważna założeniu, że prawa fizyczne nie zależą od położenia obserwatora lub ściślej od miejsca wystąpienia zjawiska. Natomiast **izotropowość** oznacza, że wszystkie kierunki w przestrzeni są równoważne. Z tych dwóch własności wynika równoważność wszystkich przestrzennych układów współrzędnych użytych do opisu badanego zjawiska. A zatem wybór układu współrzędnych jest dowolny.

Definicja

Układem odniesienia w \mathcal{E}_3 nazywamy każdą uporządkowaną czwórkę punktów $\{O; P_1, P_2, P_3\}$ taką, że wektory \vec{OP}_i są liniowo niezależne. Punkt O jest początkiem układu odniesienia $\{O; P_1, P_2, P_3\}$. Układ odniesienia nazywamy ortogonalnym, gdy

$$\vec{OP}_i \cdot \vec{OP}_j = 0 \quad \text{dla } i \neq j,$$

i ortonormalnym (lub kartezjańskim), gdy

$$\vec{OP}_i \cdot \vec{OP}_j = \delta_{ij}.$$

Pojęcie układu odniesienia jest ściśle związane z pojęciem repera w \mathcal{E}_3 . Reperem w \mathcal{E}_3 nazywaliśmy parę $\{O; \mathbf{e}_i\}$ złożoną z punktu O - punktu zaczepienia repera i bazy (tzn. liniowo niezależnej trójki uporządkowanych wektorów $\mathbf{e}_i \in \mathfrak{E}_3$).

Jeżeli przyjmiemy, że $\mathbf{e}_i = \vec{OP}_i$ to reper $\{O; \vec{OP}_i\}$ nazywamy **reperem układu odniesienia** $\{O; P_1, P_2, P_3\}$.

Biorąc układ odniesienia $\{O; P_1, P_2, P_3\}$ i jego reper $\{O; \mathbf{e}_i\}$ ($\mathbf{e}_i = \vec{OP}_i$) możemy dowolny punkt $X \in \mathcal{E}_3$ przedstawić w postaci

$$X = O + \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

Zdefiniowane w ten sposób liczby x^i nazywamy *współrzędnymi* punktu X w układzie odniesienia $\{O; P_1, P_2, P_3\}$. Gdy $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ to współrzędne x^i nazywamy kartezjańskimi.

W dalszych rozważaniach bazę ortonormalną będziemy oznaczać przez \mathbf{i}_k , zaś współrzędne kartezjańskie przez z_k . Sam układ współrzędnych kartezjańskich oznaczamy będziemy przez $\{z_k\}$ z reperem kartezjańskim $\{O; \mathbf{i}_k\}$ Rys. 2.

Obserwator w konfiguracji kartezjańskiej $\{z_k\}$ przestrzeń punktową \mathcal{E}_3 traktuje jak przestrzeń liczbową $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} = \mathcal{R}^3$ (układ trzech liczb), a przestrzeń tensorów o walencji q jak przestrzeń 3^q układów liczb.

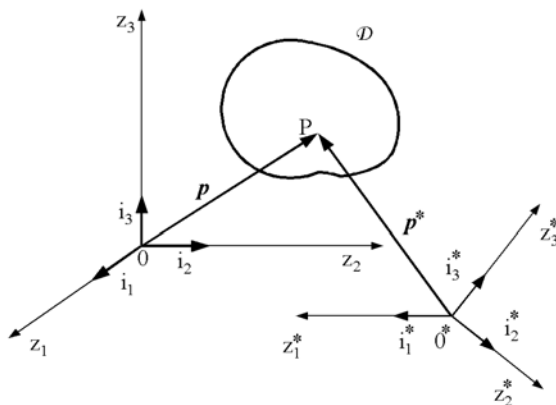
Posługując się układem kartezjańskim będziemy wszystkie indeksy pisać na jednym, dolnym poziomie. W dalszym ciągu obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina.

Jeżeli ustalony jest układ współrzędnych $\{z_k\}$ poprzez zadanie repera $\{O; \mathbf{i}_k\}$, wówczas punktowi $P \in \mathcal{E}_3$ przyporządkowana jest trójka liczb z_k ,

które są składowymi promień wektora $\mathbf{p} = \vec{OP}$ w bazie \mathbf{i}_k

$$\mathbf{p} = z_k \mathbf{i}_k,$$

gdzie $z_k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_k$.



Rys. 2. Zmiana układu współrzędnych kartezjańskich.

Z jednorodności i izotropowości przestrzeni \mathcal{E}_3 wynika, że można również wprowadzić inny układ kartezjański $\{z^*_m\}$ z reperem $\{O^*; \mathbf{i}^*_m\}$.

Punktowi $P \in \mathcal{E}_3$ odpowiadają wówczas dwa różne promień wektory: $\mathbf{p} = \vec{OP}$ i $\mathbf{p}^* = \vec{O^*P}$. Zwykle przyjmuje się, że $O = O^*$ (pomija się translację) i wówczas

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* = z_k \mathbf{i}_k = z^*_m \mathbf{i}^*_m. \quad (7.5)$$

W ten sposób jednemu punktowi $P \in \mathcal{E}_3$ zostały przyporządkowane dwie trójki liczb.

Z geometrii analitycznej wiadomo, że dwie bazy ortonormalne są związane ze sobą następującą zależnością

$$\mathbf{i}^*_m = \alpha_{mk} \mathbf{i}_k, \quad (7.6)$$

gdzie macierz transformacji jest macierzą kosinusów kierunkowych, a mianowicie

$$\alpha_{mk} = \mathbf{i}^*_m \cdot \mathbf{i}_k = \cos(\mathbf{i}^*_m, \mathbf{i}_k). \quad (7.7)$$

Równość $\mathbf{i}^*_m = \alpha_{mk} \mathbf{i}_k$ można odwrócić i rozłożyć bazę \mathbf{i}_k w bazie \mathbf{i}^*_m . Mamy wówczas zależność

$$\mathbf{i}_k = \beta_{km} \mathbf{i}^*_m.$$

Z warunku

$$\mathbf{i}_k = \beta_{km} \alpha_{ml} \mathbf{i}_l = \delta_{kl} \mathbf{i}_l$$

wynika, że macierz α_{ml} posiada następujące własności:

$$\begin{aligned} \beta_{km} \alpha_{ml} &= \delta_{kl}, \\ \alpha_{mk} &= \beta_{km}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Macierz odwrotna jest równa macierzy transponowanej. Macierz o tych własnościach nazywana jest **macierzą ortogonalną**. Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\mathbf{i}_k = \alpha_{mk} \mathbf{i}^*_m = \cos(\mathbf{i}^*_m, \mathbf{i}_k) \mathbf{i}^*_m. \quad (7.9)$$

Nie wszystkie z dziewięciu składowych macierzy α_{mk} są niezależne. Można pokazać, że tylko 3 są dowolne (porównaj kąty Eulera w mechanice ciała stałego).

Znając rozkład jednej bazy w drugiej można wyprowadzić wzór na transformację składowych wektora \mathbf{p} przy zmianie układu współrzędnych (7.5). Spełnione są następujące zależności:

$$z^*_m = \alpha_{mk} z_k, \quad (7.10)$$

$$z_k = \alpha_{mk} z^*_m.$$

W przestrzeni tensorów drugiego rzędu, dla baz ortonormalnych, polibazami będą diady:

$$\mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l, \quad \mathbf{i}^*_m \otimes \mathbf{i}^*_n.$$

Składowymi tensora $\mathbf{T} \in T_2$ w układzie kartezjańskim $\{z_k\}$ będzie macierz T_{kl} taka, że jeżeli

$$\mathbf{T} = T_{kl} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l,$$

to

$$T_{kl} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{i}_l.$$

Macierz składowych tensora \mathbf{T} przy zmianie układu współrzędnych (7.6) transformuje się w następujący sposób:

$$T^*_{mn} = \alpha_{mk} \alpha_{nl} T_{kl}. \quad (7.11)$$

Tensor \mathbf{T} w nowej polibazie ma wówczas postać

$$\mathbf{T} = T^*_{mn} \mathbf{i}^*_m \otimes \mathbf{i}^*_n. \quad (7.12)$$

Macierze T_{kl} i T^*_{mn} nazywamy **składowymi tensora \mathbf{T}** odpowiednio w układzie kartezjańskim $\{z_k\}$ i $\{z^*_m\}$.

Otrzymane wzory transformacyjne są wynikiem przyjętych definicji tensorów i mogą być również traktowane jako definicje tych obiektów geometrycznych. Jest to tzw. **definicja transformacyjna** zgodnie z którą np. tensorem drugiego rzędu nazywamy taki obiekt geometryczny, który w dowolnym układzie współrzędnych kartezjańskich $\{z_k\}$ zadany jest macierzą liczb T_{kl} , które przy zmianie układu współrzędnych (7.10) transformują się zgodnie ze wzorem (7.11).

Definicja transformacyjna pozwala, przy znajomości składowych tensora w

jednym układzie współrzędnych kartezjańskich, wyznaczyć składowe tego tensora w dowolnym innym układzie kartezjańskim, o ile znany jest sposób przejścia od jednego układu do drugiego [9].

7.3. Współrzędne krzywoliniowe

W konkretnych zagadnieniach mechaniki ośrodków ciągłych wygodniej jest czasami posługiwać się nie układem współrzędnych kartezjańskich, ale układem współrzędnych np. walcowym lub sferycznym. Współrzędne ogólniejsze niż kartezjańskie będziemy nazywali **współrzędnymi krzywoliniowymi**.

Rachunek tensorowy, w swym tradycyjnym ujęciu, zwykle rozpoczyna się od układu współrzędnych, co stwarza problem z pokazaniem niezależności tensorów od układu uważaną za istotę rachunku tensorowego. W ujęciu prezentowanym w tym wykładzie pojęcia tensorów, funkcji tensorowych itd. było wprowadzone bez jakichkolwiek układów współrzędnych. Tylko w ten sposób idea niezależności od układu była we właściwy sposób wykazana.

Wprowadzając układy współrzędnych chcemy nawiązać do podejścia klasycznego oraz umożliwić arytmetyzację teorii, o ile jest to konieczne.

Definicja

Każdy homomorfizm x obszaru D przestrzeni euklidesowej punktowej \mathcal{E}_3 na obszar $G \subset \mathcal{R}^3$

$$x: D \rightarrow G$$

nazywamy **układem współrzędnych** w D , a trójkę liczb

$$\{x^1(P), x^2(P), x^3(P)\} = x^k(P), \quad P \in D \quad (7.13)$$

nazywamy **współrzędnymi** (krzywoliniowymi) punktu P w układzie $\{x^k\}$. Jedną klasę układów współrzędnych stanowią wcześniej wprowadzone układy kartezjańskie.

W układzie kartezjańskim $\{z_m\}$ dowolnemu punktowi $P \in D$ przyporządkowana jest trójka liczb $\{z_1, z_2, z_3\}$. Są to składowe wektora (7.5)

$$\mathbf{p} = \vec{OP} = z_k \mathbf{i}_k.$$

Na punktach $P \in D$ można zadać trzy dowolne funkcje

$$x^k = x^k(P) = x^k(z_1, z_2, z_3). \quad (7.14)$$

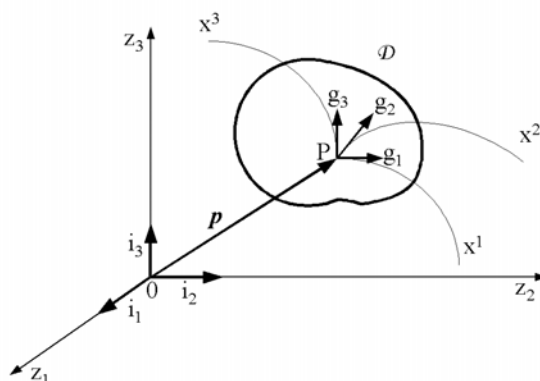
Jeżeli jacobian przekształcenia jest różny od zera, tzn. jeżeli

$$J = \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial z_m}\right) \neq 0, \quad (7.15)$$

to punktowi $P \in D$ można przyporządkować jednoznacznie trzy inne liczby $\{x^1, x^2, x^3\}$ i zależność x^k od z_m można odwrócić. Otrzymujemy wówczas, że

$$z_m = z_m(x^1, x^2, x^3). \quad (7.16)$$

W ten sposób w przestrzeni punktowej \mathcal{E}_3 został wprowadzony układ współrzędnych krzywoliniowych $\{x^k\}$ Rys. 3.



Rys. 3. Układ współrzędnych krzywoliniowych.

Geometrycznym odpowiednikiem układu współrzędnych $\{x^k\}$ w D jest następujący zbiór linii i powierzchni:

x^k linią nazywamy obraz w D zbioru

$$\{(x^1, x^2, x^3); x^i = \text{const}, i \neq k\} \subset D,$$

x^p, x^q powierzchnią nazywamy obraz w D zbioru

$$\{(x^1, x^2, x^3); x^i = \text{const}, i \neq p, i \neq q\} \subset D.$$

Jest oczywistym, że linia x^k jest częścią wspólną dwóch powierzchni.

Zdefiniowany w ten sposób zbiór linii i powierzchni nazywamy siecią geometryczną układu $\{x^k\}$. Linie x^k nazywamy **osiami układu krzywoliniowego**, Rys.3.

LOKALNA BAZA I KOBAZA . MACIERZ METRYCZNA

Z wzajemnie jednoznacznej zależności między składowymi x^k i z_m

(7.16) wynika, że promień wektor $\mathbf{p} = \vec{OP}$ (7.5) można przedstawić w postaci

$$\mathbf{p} = z_m \mathbf{i}_m = z_m(x^k) \mathbf{i}_m. \quad (7.17)$$

Równanie wektorowe linii x^k układu współrzędnych krzywoliniowych ma zatem postać $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x^k)$ dla wybranego k i przy ustalonych pozostałych dwóch współrzędnych, np. dla $k=1$ równanie $\mathbf{p} = \mathbf{p}(x^1)$ jest równaniem parametrycznym krzywej x^1 .

Z geometrii różniczkowej wynika, że wektory styczne do linii układu otrzymuje się w wyniku różniczkowania równania wektorowego (7.17) linii po parametrze zmiennym wzdłuż tej linii. Mamy zatem, że

$$\mathbf{g}_k \equiv \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z_m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m. \quad (7.18)$$

Wersory \mathbf{i}_m są stałe dla układu.

Trójkę wektorów \mathbf{g}_k (7.18) zależną od punktu $P \in D$ nazywamy **bazą lokalną** układu. Wektory te są funkcją punktu i zmieniają się przy przejściu od punktu do punktu. W ten sposób układ współrzędnych krzywoliniowych $\{x^k\}$ określony został przez **reper lokalny** $\{P; \mathbf{g}_k(P)\}$.

Definicję wektorów bazy lokalnej \mathbf{g}_k można traktować jako ich rozkład w bazie układu kartezjańskiego \mathbf{i}_m . Wykorzystując równość

$$\frac{\partial z_m}{\partial z_n} = \frac{\partial z_m}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial z_n} = \delta_{mn}$$

otrzymujemy z (7.18) rozkład bazy układu kartezjańskiego w bazie lokalnej

$$\mathbf{i}_m = \frac{\partial x^k}{\partial z_m} \mathbf{g}_k. \quad (7.19)$$

Wektory bazy lokalnej \mathbf{g}_k (7.18) układu krzywoliniowego nie są na ogół wersorami ani też wektorami wzajemnie ortogonalnymi. Można je

lokalnie unormować, wprowadzając w ten sposób bazę **fizyczną** $\mathbf{g}_{(k)}$. Jest to lokalna baza jednostkowa $|\mathbf{g}_{(k)}| = 1$. Otrzymujemy ją dzieląc każdy z wektorów bazy \mathbf{g}_k przez jego długość

$$\mathbf{g}_{(k)} = \frac{\mathbf{g}_k}{|\mathbf{g}_k|}, \quad (\text{nie sumować po } k). \quad (7.20)$$

Długości $h_k = |\mathbf{g}_k|$ wektorów bazy lokalnej \mathbf{g}_k nazywamy **parametrami Lamego** siatki krzywoliniowej.

Macierzą metryczną układu krzywoliniowego $\{x^k\}$ nazywamy macierz utworzoną z iloczynów skalarnych wektorów bazy lokalnej (7.18)

$$g_{kl} \equiv \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_l. \quad (7.21)$$

Jest to macierz symetryczna, ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny. Na diagonalnej tej macierzy znajdują się kwadraty parametrów Lamego. Jeżeli baza lokalna jest bazą ortogonalną, wówczas macierz metryczna jest macierzą diagonalną. Jeżeli baza jest bazą ortonormalną, wówczas macierz metryczna jest macierzą jednostkową.

Wektory bazy lokalnej \mathbf{g}_k nie są na ogół wzajemnie ortogonalne. Można zatem wprowadzić lokalnie inną trójkę wektorów \mathbf{g}^l zwanych **bazą dualną** lub **kobazą** takich, że spełniona jest równość

$$\mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_k = \delta^l_k. \quad (7.22)$$

Z równości tej wynika, że dla każdego dwóch wektorów bazy istnieje wektor z kobazy ortogonalny do nich. Wprowadzając za Siedovem [38] oznaczenie

$$[\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_l] \equiv \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l \quad (\text{iloczyn wektorowy})$$

można wektory kobazy przedstawić w postaci

$$\mathbf{g}^1 = \frac{[\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]}{\sqrt{g}}, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{[\mathbf{g}_3, \mathbf{g}_1]}{\sqrt{g}}, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]}{\sqrt{g}}, \quad (7.23)$$

gdzie $g = \det(g_{kl})$.

Rozkładając wektory bazy w kobazie otrzymujemy interpretację macierzy metrycznej. Równość $\mathbf{g}_k = g_{kl} \mathbf{g}^l$ oznacza, że służy ona do obniżania indeksów i jest macierzą współczynników rozkładu wektorów bazy w kobazie.

Macierzą odwrotną do macierzy g_{kl} będzie macierz $g^{mn} = \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}^n$, która jest macierzą współczynników rozkładu wektorów lokalnej kobazy w bazie $\mathbf{g}^m = g^{mn} \mathbf{g}_n$ i służy do podnoszenia indeksów.

WSPÓŁRZĘDNE KONTRA I KOWARIANTNE

Wektory bazy i kobazy stanowią dwie trójki wektorów liniowo niezależnych. Każda z nich generuje przestrzeń wektorową \mathfrak{E}_3 . Dowolny wektor z tej przestrzeni można zatem jednoznacznie rozłożyć w tych bazach

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{g}_k = v_l \mathbf{g}^l. \quad (7.24)$$

Liczby v^k nazywamy składowymi **kontrawariantnymi** wektora \mathbf{v} , zaś liczby v_l składowymi **kowariantnymi** tego wektora. Między tymi składowymi zachodzą następujące zależności:

$$v^k = g^{kl} v_l, \quad v_l = g_{lk} v^k,$$

które wynikają ze wzorów na rozkład jednej bazy w drugiej.

Dla tensora drugiego rzędu $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$, w zależności od lokalnego stowarzyszenia bazowego, otrzymujemy cztery różne macierze reprezentacji tensora

$$\mathbf{T} = T^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = T_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l = T^k{}_l \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l = T_k{}^l \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l. \quad (7.25)$$

Macierz T^{kl} nazywamy macierzą składowych **kontrawariantnych** tensora $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$, macierz T_{kl} macierzą składowych **kowariantnych**, dwie pozostałe macierze są nazywane składowymi mieszanymi tensora. Między tymi składowymi zachodzą następujące związki

$$T_{kl} = T^{mn} g_{mk} g_{nl} = T^m{}_l g_{mk} = T_k{}^n g_{nl}. \quad (7.26)$$

Z zależności (7.26) wynika istotna rola macierzy metrycznej przy przejściu od jednej reprezentacji tensora do drugiej.

Jeżeli układ $\{x^k\}$ jest układem współrzędnych kartezyjskich, to jego lokalna baza staje się bazą całego układu, jest ortonormalna i baza pokrywa się z kobazą. Nie ma wówczas różnicy między składowymi kontra i kowariantnymi. Macierz metryczna jest wówczas macierzą jednostkową $g_{kl} = \delta_{kl}$.

Rozdział 8. Różniczkowanie i całkowanie pól tensorowych

Polem tensorowym o walencji q (rzędu q) na podzbiórze $D \subset \mathcal{E}_3$ nazywamy odwzorowanie

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathcal{T}_q, \\ P \in D &\Rightarrow f(P) \in \mathcal{T}_q. \end{aligned}$$

Odwzorowanie to przyporządkowuje w sposób jednoznaczny punktom obszaru D tensory rzędu q .

Do opisu podzbiorów w przestrzeni euklidesowej punktowej służą nam układy współrzędnych. W przestrzeni euklidesowej można zawsze wprowadzić absolutny układ prostokątnych współrzędnych kartezjańskich $\{z_k\}$. Wybór układu współrzędnych jest dowolny Rozdział 7.

Układem współrzędnych $\{z_k\}$ w D nazywamy każdy homomorfizm obszaru D na obszar $G \subset \mathcal{R}^3$, a trójkę liczb

$$\{z_1(P), z_2(P), z_3(P)\} = z_k(P) \in \mathcal{R}^3$$

nazywamy współrzędnymi kartezjańskimi punktu P w tym układzie.

Poza układami kartezjańskimi można wprowadzić inne układy współrzędnych tzw. krzywoliniowe.

W przypadku układów kartezjańskich reperem w przestrzeni punktowej \mathcal{E}_3 będzie para $\{O; \mathbf{i}_k\}$, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych $\{z_k\}$, zaś wektory \mathbf{i}_k stanowią bazę ortonormalną w \mathcal{E}_3 ($\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl}$). Współrzędnymi punktu P będą trójki liczb

$$z_k = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_k. \quad (8.1)$$

Dowolny tensor $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_q$ w bazie \mathbf{i}_k można przedstawić w postaci

$$\mathbf{T} = T_{ijkl\dots mn} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n. \quad (8.2)$$

Pole tensorowe \mathbf{T} o walencji q , po wyborze układu współrzędnych, jest równoważne układowi 3^q funkcji rzeczywistych od trzech zmiennych rzeczywistych, a mianowicie

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(P),$$

$$T_{ijkl\dots mn} = T_{ijkl\dots mn}(z_p),$$

gdzie $\mathbf{T} \in T_q$, $i, j, k, l, \dots, m, n, p = 1, 2, 3$.

Pola tensorowe tak interpretowane można różniczkować i całkować o ile są spełnione założenia dotyczące różniczkowania i całkowania funkcji rzeczywistych od wielu zmiennych rzeczywistych.

8.1. Operacje różniczkowe na polach tensorowych

Klasyczne określenie pochodnej funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej jako granicy stosunku przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu nie może być adoptowane do funkcji tensorowych, ponieważ nie jest zdefiniowane dzielenie tensorów przez tensory.

Powszechnie przyjęte są dwa sposoby uogólnienia definicji pochodnej na funkcje tensorowe:

- a) uogólnienie pochodnej wykorzystujące pojęcie styczności i przybliżenia liniowego - co prowadzi do tzw. różniczki Frechet'a,
- b) uogólnienie pochodnej wykorzystujące pojęcie pochodnej kierunkowej, co prowadzi do tzw. różniczki Gateaux.

GRADIENT POLA TENSOROWEGO

Dane jest pole tensorowe $\mathbf{T}(P)$ rzędu q określone na podobszarze $D \subset \mathcal{E}_3$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(P), \quad P \in D, \quad \mathbf{T} \in T_q.$$

Rozpatrywane pole jest na ogół polem niejednorodnym, tzn. zmienia swoją wartość przy przejściu od punktu do punktu.

Lokalną zmienność tego pola można określić definiując pochodną kierunkową pola w kierunku wektora $\boldsymbol{\mu}$

$$\partial_{\mu} \mathbf{T}(P) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(P + \alpha \boldsymbol{\mu}) - \mathbf{T}(P)}{\alpha} \equiv \frac{d}{d\alpha} \mathbf{T}(P + \alpha \boldsymbol{\mu}) \Big|_{\alpha=0}.$$

Jeżeli istnieje granica tego wyrażenia dla każdego $\boldsymbol{\mu}$, to

$$\partial_{\mu} \mathbf{T}(P) = \frac{d}{d\alpha} \mathbf{T}_P(\alpha \boldsymbol{\mu}) \Big|_{\alpha=0} = [D\mathbf{T}_P(\mathbf{0})] \boldsymbol{\mu},$$

gdzie \mathbf{T}_P jest już funkcją tensorową argumentu wektorowego promień wektorów względem punktu P .

Pochodna kierunkowa pola tensorowego rzędu q jest również tensorem rzędu q . Ostatni wzór można również zapisać

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} \equiv \text{grad} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\mu}. \quad (8.3)$$

Definicja

Gradientem pola tensorowego $\mathbf{T}(P) \in \mathcal{T}_q$ nazywamy pole tensorowe

$$\nabla \mathbf{T}(P) \equiv \text{grad} \mathbf{T}(P) = D\mathbf{T}_P(\mathbf{0}) \in \mathcal{T}_{q+1}.$$

Ze wzoru na pochodną kierunkową (8.3) wynika, że zarówno lewa jak i prawa strona równości jest tensorem q -tego rzędu. Równość ta jest prawdziwa dla dowolnego kierunku $\boldsymbol{\mu}$. Z twierdzenia o dzieleniu tensorów (Dodatek) wynika wówczas, że $\text{grad} \mathbf{T}$ jest tensorem o walencji $q+1$.

N -tym gradientem pola tensorowego $\mathbf{T}(P)$ nazywamy pole

$$\nabla^n \mathbf{T} \equiv \nabla(\nabla^{n-1} \mathbf{T}) \in \mathcal{T}_{q+n}.$$

Operacja gradientu podnosi rząd tensora o 1. Gradient pola tensorowego jest miarą niejednorodności pola.

Przykłady:

POLE SKALARNE $\varphi(P)$

Jedną z geometrycznych charakterystyk pola skalarnego jest istnienie powierzchni ekwipotencjalnych, tzn. powierzchni stałości pola $\varphi(P) = \text{const}$.

Gradient pola skalarnego (8.3) jest polem wektorowym, $\text{grad} \varphi \in \mathcal{T}_1 = \mathfrak{E}_3$.

Można pokazać, że:

- a) prędkość zmiany pola skalarnego jest największa w kierunku określonym wektorem $grad\varphi$,
- b) wektor $grad\varphi$ jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej,
- c) prędkość zmiany pola skalarnego w dowolnym kierunku $\boldsymbol{\mu}$ jest określona przez $grad\varphi \cdot \boldsymbol{\mu}$.

Powyższe fakty wynikają z własności iloczynu skalarnego. Gradient pola skalarnego jest wektorem. Pochodna kierunkowa (8.3) pola skalarnego jest równa rzutowi wektora $grad\varphi$ na kierunek $\boldsymbol{\mu}$. Mamy zatem, że

$$grad\varphi \cdot \boldsymbol{\mu} = |grad\varphi| \cos(grad\varphi, \boldsymbol{\mu}).$$

Lewa strona tej równości jest największa, gdy

$$\cos(grad\varphi, \boldsymbol{\mu}) = 1.$$

Taka równość jest spełniona dla wektorów równoległych, tzn., że wówczas $grad\varphi \parallel \boldsymbol{\mu}$. Tym samym własność a) pola skalarnego została udowodniona.

Jeżeli kierunek $\boldsymbol{\mu}$ jest wersorem stycznym do powierzchni ekwipotencjalnej, wówczas pole skalarne w tym kierunku nie ulega zmianie. Ze wzoru na pochodną kierunkową tego pola otrzymujemy, że

$$grad\varphi \cdot \boldsymbol{\mu} = 0.$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów zeruje się dla wektorów prostopadłych. Skoro wektor $\boldsymbol{\mu}$ był styczny do powierzchni ekwipotencjalnej to wektor $grad\varphi$ jest do niej prostopadły. W ten sposób została udowodniona własność b). Własność c) wynika z samej definicji pochodnej kierunkowej.

POLE WEKTOROWE $v(P)$

Gradient pola wektorowego jest polem tensorowym o walencji 2,

$$gradv = \mathbf{P} \in \mathcal{T}_2. \quad (8.4)$$

Tensor \mathbf{P} posiada wszystkie własności tensora drugiego rzędu. Jest on na ogół tensorem niesymetrycznym. Można dokonać jego symetryzacji, zwężenia itd.

Definicja

Dywergencją pola wektorowego \mathbf{v} nazywamy pole skalarne otrzymane z pola tensorowego \mathbf{P} (8.4) przez dokonanie na nim operacji zwężenia

$$\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv \tilde{\mathbf{P}} = \operatorname{tr}\mathbf{P} = \operatorname{tr}(\operatorname{grad}\mathbf{v}). \quad (8.5)$$

Jeżeli ponadto pole wektorowe \mathbf{v} jest gradientem pola skalarnego $\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi$, to skalar

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{divgrad}\varphi = \Delta\varphi \quad (8.6)$$

nazywamy **lapiasjanem** pola skalarnego φ .

Operacja dywergencji obniża rząd pola tensorowego o 1.

Definicja

Na polu wektorowym \mathbf{v} można określić inną operację, zwaną **rotacją tego pola**. Rotacja pola wektorowego jest wektorem

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{u}. \quad (8.7)$$

Jest to pole wektorowe \mathbf{u} , które jest wektorem dwoistym do pola \mathbf{P}^T (Dodatek).

$$(\mathbf{u})_i = \varepsilon_{ikl} v_{l,k}. \quad (8.8)$$

Operacja rotacji nie zmienia rzędu pola.

Operacje dywergencji i rotacji można zdefiniować dla dowolnego pola tensorowego, przy czym nie są one wówczas określone jednoznacznie.

Jeżeli $\mathbf{T}(P)$ jest polem tensorowym rzędu q , to **i -tą dywergencją** tego pola nazywamy pole tensorowe rzędu $q-1$ postaci

$$\operatorname{div}^{(i)}\mathbf{T} = \operatorname{grad}^{(i,q+1)}\mathbf{T}, \quad 1 \leq i \leq q. \quad (8.9)$$

Takich dywergencji może być q . Można się umówić, że pierwszą dywergencję ($i=1$) nazywamy dywergencją pola.

Jeżeli $\mathbf{T}(P)$ jest polem tensorowym rzędu q , to *i -tą rotacją* tego pola nazywamy pole tensorowe rzędu q , które jest dwoiste do tensora $\text{grad}\mathbf{T}$ względem i -tej składowej tensora \mathbf{T} .

Z pojęciem gradientu, dywergencji i rotacji pól tensorowych związane są następujące definicje:

a) Pole wektorowe $\mathbf{v}(P)$ nazywamy *potencjalnym* w obszarze $D \subset \mathcal{E}_3$, jeżeli na D określone jest pole skalarne $\varphi(P)$ takie, że w każdym punkcie $P \in D$ spełniona jest równość

$$\mathbf{v} = \text{grad}\varphi.$$

b) Pole wektorowe $\mathbf{v}(P)$ nazywamy *solenoidalnym* w obszarze $D \subset \mathcal{E}_3$, jeżeli na D określone jest pole wektorowe $\mathbf{u}(P)$ takie, że w każdym punkcie $P \in D$ spełniona jest równość

$$\mathbf{v} = \text{rot}\mathbf{u}.$$

c) Pole wektorowe $\mathbf{v}(P)$ nazywamy *bezwirowym* w obszarze $D \subset \mathcal{E}_3$, jeżeli w każdym punkcie $P \in D$

$$\text{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

d) Pole wektorowe $\mathbf{v}(P)$ nazywamy *nirozbieżnym* (bezzródłowym) w obszarze $D \subset \mathcal{E}_3$, jeżeli w każdym punkcie $P \in D$

$$\text{div}\mathbf{v} = 0.$$

Z powyższych definicji wynikają następujące wnioski:

- każde pole potencjalne jest polem bezwirowym - $\text{rot}\mathbf{v} = \text{rot grad}\varphi = 0$,
- każde pole solenoidalne jest polem bezzródłowym - $\text{div}\mathbf{v} = \text{div rot}\mathbf{u} = 0$.

Można udowodnić, że są prawdziwe następujące równości:

$$\text{div}(\varphi\mathbf{v}) = \varphi\text{div}\mathbf{v} + \mathbf{v}\text{grad}\varphi,$$

$$\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v}\text{rot}\mathbf{u} - \mathbf{u}\text{rot}\mathbf{v},$$

$$\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \text{grad})\mathbf{v} + \mathbf{u}\text{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\text{div}\mathbf{u},$$

$$\text{divgrad}\varphi = \Delta\varphi,$$

$$\text{rotrot}\mathbf{v} = \text{graddiv}\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}.$$

8.2. Różniczkowanie pól tensorowych w układach kartezjańskich

Do opisu podobszarów D w przestrzeni euklidesowej punktowej \mathcal{E}_3 wprowadzamy układy współrzędnych. W przestrzeni euklidesowej \mathcal{E}_3 można zawsze wprowadzić absolutny układ współrzędnych kartezjańskich. Można również wprowadzić współrzędne ogólniejsze zwane współrzędnymi krzywoliniowymi.

Pole tensorowe, po wyborze układu współrzędnych, reprezentowane jest układem funkcji rzeczywistych od trzech zmiennych rzeczywistych.

Pola tensorowe tak rozumiane możemy różniczkować o ile są spełnione założenia dotyczące różniczkowania funkcji rzeczywistych.

Sposób różniczkowania pól tensorowych, jako układu funkcji rzeczywistych od trzech zmiennych rzeczywistych, zależy w sposób istotny od wyboru układu współrzędnych. Różniczkowanie tych pól jest najprostsze w układach kartezjańskich ze względu na istnienie absolutnej bazy.

W układzie współrzędnych kartezjańskich $\{z_k\}$ o reperze $(O; \mathbf{i}_k)$ punktowi $P \in D$ przyporządkowane są trójki liczb z_k nazywane współrzędnymi kartezjańskimi punktu P w tym układzie.

Jeżeli wektor $\mathbf{p} = \vec{OP}$ jest promień wektorem punktu P względem punktu O to współrzędnymi kartezjańskimi punktu P są liczby

$$z_k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl}.$$

Pole tensorowe rzędu q $\mathbf{T}(P)$ w bazie ortonormalnej \mathbf{i}_k jest reprezentowane układem 3^q funkcji rzeczywistych od trzech funkcji rzeczywistych $T_{mn...kl} = T_{mn...kl}(z_p)$.

Pola tensorowe w ten sposób rozumiane można różniczkować względem zmiennych przestrzennych z_k .

Definiujemy operator różniczkowy nabla, który w układzie współrzędnych kartezjańskich ma postać

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial z_m} \otimes \mathbf{i}_m. \quad (8.10)$$

Stąd wynika, że

$$\mathit{grad}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T} = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial z_m} \otimes \mathbf{i}_m. \quad (8.11)$$

Jeżeli

$$\mathbf{T} = T_{kl\dots rs} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_s,$$

wówczas

$$\nabla\mathbf{T} = T_{kl\dots rs,m} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_m, \quad (8.12)$$

gdzie przez przecinek oznaczono różniczkowanie po zmiennych przestrzennych. W układach kartezjańskich baza jest stała i wychodzi poza znak różniczkowania.

Dla pola $\mathbf{T}(P)$ można wyznaczać dalsze gradienty tego pola. Każdy następny podnosi rząd tensora o 1. Tensorem rzędu $q+2$ będzie tensor

$$\nabla(\nabla\mathbf{T}) = T_{kl\dots rs,mn} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n.$$

Laplasjanem tego pola nazywamy tensor o walencji q postaci

$$\Delta\mathbf{T} = \nabla^2\mathbf{T} = T_{kl\dots rs,mm} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_s = (T_{kl\dots rs,11} + T_{kl\dots rs,22} + T_{kl\dots rs,33}) \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_r \otimes \mathbf{i}_s.$$

Dla pola skalarnego $\varphi(P) = \varphi(z_m)$ otrzymujemy z (8.10), że

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z_m} \mathbf{i}_m = \varphi_{,m} \mathbf{i}_m = \varphi_{,1} \mathbf{i}_1 + \varphi_{,2} \mathbf{i}_2 + \varphi_{,3} \mathbf{i}_3, \quad (8.13)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_{,11} + \varphi_{,22} + \varphi_{,33}. \quad (8.14)$$

Dla pola wektorowego $\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(z_k) = v_l(z_k) \mathbf{i}_l$ gradient pola jest tensorem

$$\nabla\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z_m} \otimes \mathbf{i}_m = \mathbf{v}_{,m} \otimes \mathbf{i}_m = v_{l,m} \mathbf{i}_l \otimes \mathbf{i}_m \quad (8.15)$$

i macierz pochodnych cząstkowych $v_{l,m}$ jest macierzą reprezentacji tensora drugiego rzędu w bazie \mathbf{i}_k .

Stosując operację zwiężenia gradientu pola wektorowego – pola tensorowego drugiego rzędu $\nabla\mathbf{v}$, otrzymujemy skalar zwany dywergencją

pola wektorowego \mathbf{v}

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \tilde{\mathbf{v}} = v_{m \succ m} = v_{1 \succ 1} + v_{2 \succ 2} + v_{3 \succ 3}. \quad (8.16)$$

Dla pola tensorowego $\mathbf{T}(P)$ o walencji q można wyznaczyć q różnych dywergencji, i -tą dywergencją pola $\mathbf{T}(P)$ nazywamy tensor rzędu $q-1$ postaci

$$\nabla \tilde{\mathbf{T}} = T_{kl \dots i \dots us \succ i}^{(i, q+1)} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_u \otimes \mathbf{i}_s.$$

Rotacją pola wektorowego \mathbf{v} nazywamy wektor \mathbf{u} dwoisty do gradientu pola

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{mkl} v_{l \succ k} \mathbf{i}_m. \quad (8.17)$$

Wektor ten ma składowe

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = (v_{3 \succ 2} - v_{2 \succ 3}) \mathbf{i}_1 + (v_{1 \succ 3} - v_{3 \succ 1}) \mathbf{i}_2 + (v_{2 \succ 1} - v_{1 \succ 2}) \mathbf{i}_3, \quad (8.18)$$

które się zerują jeżeli gradient pola wektorowego jest tensorem symetrycznym.

Dla pola tensorowego $\mathbf{T}(P)$ o walencji q można wyznaczyć q różnych rotacji, i -tą rotacją pola $\mathbf{T}(P)$ nazywamy tensor rzędu q postaci

$$\operatorname{rot}^i \mathbf{T} = \varepsilon_{jmi} T_{kl \dots i \dots us \succ m} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_l \otimes \dots \otimes \mathbf{i}_u \otimes \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_j.$$

8.3. Różniczkowanie pól tensorowych w układach krzywoliniowych

W przestrzeni fizycznej, która jest modelowana przestrzenią euklidesową punktową można zawsze wprowadzić układ kartezjański. W konkretnych zagadnieniach mechaniki wygodniej jest czasami posługiwać się ogólniejszymi układami zwanymi krzywoliniowymi (punkt 7.3).

Układem współrzędnych w obszarze $D \subset \mathfrak{A}_3$ nazywamy każdy homomorfizm $\{x^m\}$ obszaru D na obszar $G \subset \mathcal{R}^3$, a trójki liczb

$$\{x^1(P), x^2(P), x^3(P)\} = x^k(P), \quad P \in D$$

nazywamy współrzędnymi (krzywoliniowymi) punktu P w tym układzie. Jedną klasę układów stanowiły układy kartezjańskie w których każdemu punktowi P przyporządkowano trójki liczb $z_m(P)$. Na punktach P można zadać trzy dowolne funkcje

$$x^k = x^k(P) = x^k(z_1, z_2, z_3) = x^k(z_m). \quad (8.19)$$

Jeżeli jacobian przekształcenia J

$$J \equiv \det\left(\frac{\partial x^k}{\partial z_m}\right) \neq 0$$

to zależność (8.19) jest odwracalna i punktowi $P \in D$ można przyporządkować trzy inne trójki liczb $x^k(P)$ i w ten sposób został wprowadzony układ współrzędnych krzywoliniowych.

Z geometrii różniczkowej wynika, że jeżeli równanie wektorowe linii układu ma postać

$$\mathbf{p} = O\vec{P} = z_m \mathbf{i}_m = z_m(x^k) \mathbf{i}_m,$$

to wektory styczne w punkcie P do krzywych układu współrzędnych dane są wzorami

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x^k} = \frac{\partial z_m}{\partial x^k} \mathbf{i}_m. \quad (8.20)$$

Trójkę wektorów \mathbf{g}_k określonych w punkcie P nazywamy bazą lokalną układu.

Układ krzywoliniowy określony jest przez reper naturalny układu $\{P; \mathbf{g}_k(P)\}$, który jest reperem lokalnym.

Wektory \mathbf{g}_k stanowią bazę w \mathfrak{E}_3 . Każdą z baz \mathbf{g}_k i \mathbf{i}_m można rozłożyć w drugiej. Definicję wektorów \mathbf{g}_k można traktować jak ich rozkład w bazie \mathbf{i}_m . Odwracając zależność (8.20) otrzymujemy, że

$$i_m = \frac{\partial x^k}{\partial z_m} \mathbf{g}_k. \quad (8.21)$$

Bazą dualną lub kobazą do bazy \mathbf{g}_k nazywamy bazę, którą spełnia równość

$$\mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_k = \delta^l_k.$$

Pole tensorowe $\mathbf{T}(P)$, po zadaniu układu krzywoliniowego, można różniczkować po zmiennych przestrzennych x^k . W tym celu korzystamy z operatora nabla, który w tym przypadku ma postać

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes \mathbf{g}^k. \quad (8.22)$$

Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= \mathit{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \mathbf{g}^k = \varphi_{,k} \mathbf{g}^k, \\ \nabla \mathbf{v} &= \mathit{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} \otimes \mathbf{g}^k = \mathbf{v}_{,k} \otimes \mathbf{g}^k, \\ \nabla \mathbf{T} &= \mathit{grad} \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k} \otimes \mathbf{g}^k = \mathbf{T}_{,k} \otimes \mathbf{g}^k. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Aby wyrazić operację gradientu przez składowe pól tensorowych w układach krzywoliniowych należy wyznaczyć pochodne

$$\mathbf{v}(x^m)_{,k} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k}, \quad \mathbf{T}(x^m)_{,k} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x^k}.$$

W tym miejscu pojawia się istotna różnica między różniczkowaniem pól tensorowych w układach kartezjańskich i w układach krzywoliniowych.

Różniczkując pole tensorowe w układach kartezjańskich różniczkujemy jedynie reprezentację tego pola w bazie absolutnej \mathbf{i}_k , która jest stała. Różniczkując pole tensorowe w układach krzywoliniowych musimy pamiętać, że baza \mathbf{g}_k i kobaza \mathbf{g}^l są bazami lokalnymi i zmieniają się przy przejściu od punktu do punktu. Należy zatem zróżniczkować również wektory bazy i kobazy, tzn. wyznaczyć pochodne

$$\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k} \text{ i } \frac{\partial \mathbf{g}^n}{\partial x^k}. \quad (8.24)$$

Z definicji wektorów bazy lokalnej (8.20) wynika, że

$$\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^m \partial x^k} = \frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial x^k \partial x^m} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial x^m}. \quad (8.25)$$

Taka równość drugich pochodnych jest cechą przestrzeni riemanowskich. Można zatem napisać, że rozkład pochodnej bazy w bazie będzie miał postać

$$\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k} = \Gamma^l{}_{mk} \mathbf{g}_l. \quad (8.26)$$

Wielkości trój-indeksowe $\Gamma^l{}_{mk}$ są symetryczne po parze indeksów m, k (8.25). Są one nazywane **symbolami Christoffela** II rodzaju. **Symbolami Christoffela** I rodzaju nazywamy wielkości

$$\Gamma_{n,mk} = g_{nl} \Gamma^l{}_{mk}.$$

Symbole Christoffela wyznaczamy z (8.20) i (8.21)

$$\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial z_n}{\partial x^m} \mathbf{i}_n \right) = \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^k \partial x^m} \mathbf{i}_n = \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial z_n} \mathbf{g}_l. \quad (8.27)$$

Z porównania (8.26) i (8.27) otrzymujemy, że

$$\Gamma^l{}_{km} \equiv \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^k \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial z_n}. \quad (8.28)$$

Pochodną wektorów kobazy wyznaczamy korzystając z definicji

$$\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}^n = \delta_m{}^n.$$

Różniczkując obie strony tej równości otrzymujemy zależność

$$\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k} \mathbf{g}^n + \mathbf{g}_m \frac{\partial \mathbf{g}^n}{\partial x^k} = 0$$

z której wynika, że

$$\mathbf{g}_m \frac{\partial \mathbf{g}^n}{\partial x^k} = -\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k} \mathbf{g}^n = -\Gamma^l{}_{mk} \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{g}^n = -\Gamma^l{}_{mk} \delta_l^n = -\Gamma^n{}_{mk}.$$

Mnożąc obie strony tej równości przez \mathbf{g}^k otrzymujemy, że

$$\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_m \frac{\partial \mathbf{g}^n}{\partial x^k} = -\Gamma^n{}_{mk} \mathbf{g}^k.$$

Ostatecznie wzór na pochodną wektorów kobazy przyjmuje postać

$$\frac{\partial \mathbf{g}^n}{\partial x^m} = -\Gamma^n{}_{mk} \mathbf{g}^k. \quad (8.29)$$

Symbole Christoffela nie transformują się jak obiekt o walencji 3. Można je jednak wyrazić przez pochodne macierzy metrycznej

$$g_{mn} = \mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_n. \quad (8.30)$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$g_{mn \triangleright k} \equiv \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k}, \quad \mathbf{g}_{m \triangleright k} \equiv \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k},$$

to różniczkując macierz metryczną (8.30) otrzymujemy

$$g_{mn \triangleright k} = \mathbf{g}_{m \triangleright k} \cdot \mathbf{g}_n + \mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_{n \triangleright k}.$$

Ponieważ $\mathbf{g}_{m \triangleright k} = \mathbf{g}_{k \triangleright m}$, to zachodzi równość

$$g_{mn \triangleright k} + g_{km \triangleright n} - g_{nk \triangleright m} = 2\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_{n \triangleright k} = 2\mathbf{g}_m \Gamma^l{}_{nk} \mathbf{g}_l.$$

Stąd wynika, że

$$\Gamma^l{}_{nk} = \frac{1}{2} (g_{mn \triangleright k} + g_{km \triangleright n} - g_{nk \triangleright m}) g^{lm}.$$

POJĘCIE POCHODNEJ KOWARIANTNEJ

W definicji gradientu pola tensorowego (8.23) występują pochodne tego pola względem zmiennych przestrzennych. Dla pola wektorowego $\mathbf{v}(P)$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{v}_{,k} \otimes \mathbf{g}^k. \quad (8.31)$$

Znając pochodne po zmiennych przestrzennych wektorów bazy (8.26) i kobazy (8.29) możemy wyznaczyć ich gradienty. Mamy mianowicie, że

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{g}_m &= \mathbf{g}_{m ; k} \otimes \mathbf{g}^k = \Gamma_{mk}^l \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k, \\ \nabla \mathbf{g}^n &= \mathbf{g}^{n ; k} \otimes \mathbf{g}^k = -\Gamma_{kl}^n \mathbf{g}^l \otimes \mathbf{g}^k.\end{aligned}\quad (8.32)$$

W celu wyrażenia gradientu pola wektorowego (8.31) przez jego składowe w układzie krzywoliniowym przedstawiamy go w bazie

$$\mathbf{v} = v^m \mathbf{g}_m.$$

Po zróżniczkowaniu tego wyrażenia otrzymujemy

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} = \frac{\partial v^m}{\partial x^k} \mathbf{g}_m + v^m \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial x^k} = \frac{\partial v^m}{\partial x^k} \mathbf{g}_m + v^m \Gamma_{mk}^l \mathbf{g}_l = \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^k} + v^m \Gamma_{mk}^l \right) \mathbf{g}_l. \quad (8.33)$$

Wyrażenie występujące w nawiasie nazywamy **pochodną kowariantną** wektora \mathbf{v} od jego składowych kontrawariantnych. Wprowadzamy następujące oznaczenie

$$v^{l ; k} \equiv \left(\frac{\partial v^l}{\partial x^k} + v^m \Gamma_{mk}^l \right).$$

Wzór na gradient pola wektorowego (8.31) przyjmuje teraz postać

$$\nabla \mathbf{v} = v^{l ; k} \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^k. \quad (8.34)$$

Ze wzoru tego wynika, że macierz pochodnych kowariantnych $v^{l ; k}$ jest reprezentacją tensora drugiego rzędu. Macierz samych pochodnych cząstkowych taką reprezentacją nie jest.

Gdy układ współrzędnych krzywoliniowych staje się układem kartezjańskim, wówczas symbole Christoffela (8.28) zerują się i pochodna kowariantna jest równa pochodnej cząstkowej.

Dla pola skalarnego pochodna kowariantna jest równa pochodnej cząstkowej

$$\varphi_{; k} = \varphi_{, k}.$$

Ze wzoru na gradient pola wektorowego (8.34) wynika, że

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \tilde{\mathbf{v}} = v^l ;_k \mathbf{g}_l \cdot \mathbf{g}^k = v^l ;_k \delta_l^k = v^k ;_k. \quad (8.35)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = v_m ;_k \mathbf{g}^k \times \mathbf{g}^m.$$

Znając pochodne wektorów bazy i kobazy po zmiennych przestrzennych układu krzywoliniowego możemy wyznaczać gradienty dowolnych pól tensorowych i wyrażać je przez składowe tych pól w tych układach. Jeżeli np.

$$\mathbf{T} = T^m{}_n \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n$$

to z (8.23) wynika, że

$$\nabla \mathbf{T} = \mathbf{T} ;_k \otimes \mathbf{g}^k = (T^m{}_n \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n) ;_k \otimes \mathbf{g}^k \equiv T^m{}_{n;k} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n \otimes \mathbf{g}^k,$$

gdzie

$$\begin{aligned} (T^m{}_n \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n) ;_k &= T^m{}_{n;k} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n + T^m{}_n \mathbf{g}_{m;k} \otimes \mathbf{g}^n + T^m{}_n \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n ;_k = \\ &= T^m{}_{n;k} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n + T^m{}_n \Gamma^l{}_{mk} \mathbf{g}_l \otimes \mathbf{g}^n - T^m{}_n \mathbf{g}_m \otimes \Gamma^s{}_{kn} \mathbf{g}^s = (T^m{}_{n;k} + T^i{}_n \Gamma^m{}_{ik} - T^m{}_j \Gamma^j{}_{kn}) \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n = \\ &= T^m{}_{n;k} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n. \end{aligned}$$

Przez ; (średnik) oznaczono pochodną kowariantną.

Korzystając z przedstawionego algorytmu można wyrażać gradienty dowolnych pól tensorowych przez ich składowe w układzie krzywoliniowym.

8.4. Operacje całkowe na polach tensorowych

Dla pól tensorowych można rozpatrywać całki krzywoliniowe, powierzchniowe i objętościowe, które sprowadzają się odpowiednio do całek riemanowskich pojedynczych, podwójnych i potrójnych, gdyż znane z analizy matematycznej twierdzenia całkowe mają również zastosowanie w przypadku pól tensorowych.

I. CAŁKI KRZYWOLINIOWE

W przestrzeni fizycznej \mathcal{E}_3 dany jest łuk L - (krzywa regularna) opisany równaniem parametrycznym

$$z_k = z_k(\alpha), \quad \text{dla } \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \quad (8.36)$$

Funkcja wektorowa $\mathbf{p}(\alpha) = z_k(\alpha)\mathbf{i}_k$ jednej zmiennej rzeczywistej jest odcinkami ciągła i różniczkowalna.

Elementem zorientowanym łuku L nazywamy wektor elementarny $d\mathbf{p}(\alpha) = dz_k(\alpha)\mathbf{i}_k$ skierowany stycznie do łuku w kierunku zgodnym z jego parametryzacją. Jego długość nazywamy **elementarną długością łuku dl** .

Z równania parametrycznego łuku (8.36) wynika, że

$$dz_k = \frac{dz_k}{d\alpha} d\alpha, \quad (8.37)$$

gdzie wielkości $\frac{dz_k}{d\alpha}$ są składowymi wektora stycznego do łuku L .

Elementarną długość łuku dl wyznaczamy ze wzoru

$$dl = [d\mathbf{p}(\alpha) \cdot d\mathbf{p}(\alpha)]^{\frac{1}{2}} = (dz_k dz_k)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{dz_k}{d\alpha} \frac{dz_k}{d\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha. \quad (8.38)$$

Stąd wynika, że całkowita długość łuku L jest równa całce

$$L = \int_L dl = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{\frac{dz_k}{d\alpha} \frac{dz_k}{d\alpha}} d\alpha.$$

**Ia. CAŁKA KRZYWOLINIOWA PIERWSZEGO RODZAJU
- CAŁKA KRZYWOLINIOWA PO ŁUKU NIEZORIENTOWANYM**

Całką krzywoliniową z pola tensorowego $\mathbf{T}(P) \in \mathcal{T}_q$ po łuku niezorientowanym L nazywamy całkę krzywoliniową z tego pola po elementarnej długości łuku (8.38)

$$\int_L \mathbf{T} dl.$$

Całka ta, po wyborze układu współrzędnych, jest równoważna układowi 3^q całek riemanowskich pojedynczych postaci

$$\int_L T_{ijkl\dots mn}(z_p) dl = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} T_{ijkl\dots mn}(z_p(\alpha)) \left(\frac{dz_r}{d\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} d\alpha. \quad (8.39)$$

W wyniku całkowania nie zmienia się rząd tensora. Mamy tyle całek jaki jest wymiar przestrzeni tensorów o walencji q , tzn. 3^q .

**Ib. CAŁKA KRZYWOLINIOWA DRUGIEGO RODZAJU
- CAŁKA KRZYWOLINIOWA PO ŁUKU ZORIENTOWANYM**

Całą krzywoliniową z pola tensorowego $\mathbf{T}(P) \in T'_q$ po łuku zorientowanym (8.37) L nazywamy całkę postaci

$$\int_L \mathbf{T} \otimes d\mathbf{p}.$$

Całka ta jest równoważna układowi 3^{q+1} całek riemanowskich pojedynczych

$$\int_L T_{ijkl\dots mn}(z_p) dz_r = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} T_{ijkl\dots mn}(z_p(\alpha)) \frac{dz_r}{d\alpha} d\alpha. \quad (8.40)$$

W wyniku całkowania otrzymujemy tensor o walencji $q+1$.

W szczególności można rozpatrywać całki krzywoliniowe postaci

$$\int_L \overset{(\nu, q+1)}{\mathbf{T}} \otimes d\mathbf{p}, \quad \text{gdzie} \quad 1 \leq \nu \leq q.$$

Takich całek w zależności od indeksu ν może być q . Dokonujemy zwiężenia tensora \mathbf{T} z wektorem $d\mathbf{p}$. Takich zwiężeń może być tyle jaka jest walencja tensora \mathbf{T} .

Każda z tych całek jest równoważna układowi 3^{q-1} całek riemanowskich pojedynczych

$$\int_L T_{ijkl\dots r\dots mn}(z_p) dz_r = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} T_{ijkl\dots r\dots mn}(z_p(\alpha)) \frac{dz_r}{d\alpha} d\alpha.$$

Przykład:

Całkę krzywoliniową po krzywej zamkniętej z pola wektorowego $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ postaci

$$\oint_L \mathbf{v}(\mathbf{p}) \cdot d\mathbf{p} = \oint_L v_k(z_m) dz_k = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v_k(z_m(\alpha)) \frac{dz_k}{d\alpha} d\alpha \quad (8.41)$$

nazywamy *cyrkulacją pola wektorowego* po tej krzywej.

II. CAŁKI POWIERZCHNIOWE

Płat powierzchniowy S w przestrzeni fizycznej \mathcal{E}_3 opisuje funkcja wektorowa od dwóch zmiennych. Równanie parametryczne płata S ma postać

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\alpha, \beta) = z_k(\alpha, \beta) \mathbf{i}_k, \quad (\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2) \quad (8.42)$$

gdzie linie α, β tworzą układ krzywoliniowy współrzędnych powierzchniowych.

Wektory elementarne skierowane stycznie do linii α i linii β w kierunku zgodnym z ich parametryzacją oznaczamy przez $d\mathbf{p}^{(1)}$ i $d\mathbf{p}^{(2)}$. Ich składowe w układzie kartezjańskim są związane z parametryzacją zależnościami

$$dz_k^{(1)} = \frac{\partial z_k}{\partial \alpha} d\alpha, \quad dz_k^{(2)} = \frac{\partial z_k}{\partial \beta} d\beta. \quad (8.43)$$

Jeżeli przez dS oznaczymy pole powierzchni elementarnego płata, to *elementem zorientowanym tego płata* nazywamy wektor $d\mathbf{S}$ o składowych $dS_k = n_k dS$, gdzie wektor \mathbf{n} jest wersorem prostopadłym do elementarnego płata dS .

Korzystając z własności iloczynu wektorowego możemy napisać, że

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{p}^{(1)} \times d\mathbf{p}^{(2)}.$$

W składowych (8.43) mamy zależność

$$dS_k = \varepsilon_{kij} dz_i^{(1)} dz_j^{(2)} = \varepsilon_{kij} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} d\alpha d\beta, \quad (8.44)$$

która określa zorientowany element powierzchni. Dla powierzchni zamkniętej parametryzację α, β dobieramy tak, aby wektor dS_k był skierowany na zewnątrz obszaru zamkniętego.

Pole dS powierzchni płata elementarnego jest równe długości wektora dS_k , tzn., że

$$dS = (dS_k \cdot dS_k)^{\frac{1}{2}} = (\varepsilon_{kij} dz_i^{(1)} dz_j^{(2)} \varepsilon_{kmn} dz_m^{(1)} dz_n^{(2)})^{\frac{1}{2}} = (\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} \frac{\partial z_m}{\partial \alpha} \frac{\partial z_n}{\partial \beta})^{\frac{1}{2}} d\alpha d\beta.$$

Wykorzystując własność symbolu permutacyjnego (D.5)

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

pole dS możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} dS &= (\varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} \frac{\partial z_m}{\partial \alpha} \frac{\partial z_n}{\partial \beta})^{\frac{1}{2}} d\alpha d\beta = \{(\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} \frac{\partial z_m}{\partial \alpha} \frac{\partial z_n}{\partial \beta}\}^{\frac{1}{2}} d\alpha d\beta = \\ &= \left\{ \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} - \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} \frac{\partial z_j}{\partial \alpha} \frac{\partial z_i}{\partial \beta} \right\}^{\frac{1}{2}} d\alpha d\beta \equiv A(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Całkowite pole płata jest zatem równe całce

$$\int_S dS = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} A(\alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

IIa. CAŁKA POWIERZCHNIOWA PO PŁACIE NIEZORIENTOWANYM

Całką powierzchniową z pola tensorowego \mathbf{T} o walencji q po płacie niezorientowanym nazywamy całkę od tego pola po elemencie powierzchni tego płata (8.45)

$$\int_S \mathbf{T} dS.$$

Całka ta, po wyborze układu współrzędnych, jest równoważna układowi 3^q całek podwójnych riemanowskich postaci

$$\int_S T_{ijkl\dots mn}(z_p) dS = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} T_{ijkl\dots mn}(z_p(\alpha, \beta)) A(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (8.46)$$

Należy podkreślić, że w tym przypadku mamy tyle całek jaki jest wymiar przestrzeni tensorów o walencji q , tzn. 3^q .

IIb. CAŁKA POWIERZCHNIOWA PO PŁACIE ZORIENTOWANYM

Całką powierzchniową z pola tensorowego $\mathbf{T}(P)$ o walencji q po płacie zorientowanym nazywamy całką powierzchniową postaci

$$\int_S \mathbf{T} \otimes d\mathbf{S}.$$

Po wyborze układu współrzędnych, całka ta jest równoważna układowi 3^{q+1} całek podwójnych riemanowskich

$$\int_S T_{ijkl\dots mn}(z_p) dS_r = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} T_{ijkl\dots mn}(z_p(\alpha, \beta)) \varepsilon_{rut} \frac{\partial z_u}{\partial \alpha} \frac{\partial z_t}{\partial \beta} d\alpha d\beta. \quad (8.47)$$

Należy zauważyć, że w tym przypadku całek jest tyle jaki jest wymiar przestrzeni tensorów rzędu $q+1$, tzn. tensorów o rząd wyższym niż pole tensorowe całkowane \mathbf{T} .

Dokonując zwężenia tensora \mathbf{T} z elementem wektorowym płata $d\mathbf{S}$ (8.44) uzyskujemy q różnych całek powierzchniowych

$$\int_S \mathbf{T} \overset{(\mu, q+1)}{\otimes} d\mathbf{S}, \quad (1 \leq \mu \leq q)$$

z których każda jest równoważna układowi 3^{q-1} całek riemanowskich podwójnych postaci

$$\int_S T_{ijkl\dots r\dots mn}(z_p) dS_r = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} T_{ijkl\dots r\dots mn}(z_p(\alpha, \beta)) \varepsilon_{rut} \frac{\partial z_u}{\partial \alpha} \frac{\partial z_t}{\partial \beta} d\alpha d\beta. \quad (8.48)$$

Przykłady:

a) Całkę powierzchniową z pola wektorowego $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ po powierzchni zamkniętej postaci

$$\oint_S \mathbf{v}(\mathbf{p}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S v_k(z_p) dS_k = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} v_k(z_p(\alpha, \beta)) \varepsilon_{kij} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_j}{\partial \beta} d\alpha d\beta$$

nazywamy **strumieniem wektora** \mathbf{v} przez powierzchnię.

b) Całkę powierzchniową z pola wektorowego $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ po powierzchni zamkniętej postaci

$$\oint_S \mathbf{v}(\mathbf{p}) \times d\mathbf{S}$$

nazywamy **cyrkulacją wektora** \mathbf{v} po powierzchni zamkniętej. Jest ona równoważna trzem całkom

$$\oint_S \varepsilon_{kij} v_i dS_j = \oint_S \varepsilon_{kij} v_i n_j dS.$$

III. CAŁKA OBJĘTOŚCIOWA

Obszarem regularnym V w przestrzeni fizycznej \mathcal{E}_3 nazywamy obszar ograniczony skończoną liczbą płatów powierzchniowych S_i przecinających się wzdłuż krzywych regularnych L_k i zadany

parametrycznie jako funkcja od trzech zmiennych stanowiących współrzędne krzywoliniowe w tym obszarze (równanie parametryczne bryły)

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\alpha, \beta, \gamma)$$

lub w składowych

$$z_k = z_k(\alpha, \beta, \gamma). \\ (\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \quad \gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2).$$

Jeżeli przez dV oznaczymy elementarną objętość, to jest ona równa wyznacznikowi z macierzy utworzonej ze składowych elementarnych wektorów stycznych do linii układu krzywoliniowego.

Trzy wektory elementarne skierowane stycznie do krzywych α, β, γ

$$dz_k^{(1)} = \frac{\partial z_k}{\partial \alpha} d\alpha, \quad dz_k^{(2)} = \frac{\partial z_k}{\partial \beta} d\beta, \quad dz_k^{(3)} = \frac{\partial z_k}{\partial \gamma} d\gamma$$

są liniowo niezależne.

Elementarna objętość dV jest wówczas równa wyznacznikowi macierzy ze składowych tych wektorów

$$dV = \det(dz_k^{(1)}, dz_k^{(2)}, dz_k^{(3)}) = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial \alpha} d\alpha, \frac{\partial z_k}{\partial \beta} d\beta, \frac{\partial z_k}{\partial \gamma} d\gamma\right) = \\ = \det\left(\frac{\partial z_k}{\partial \alpha}, \frac{\partial z_k}{\partial \beta}, \frac{\partial z_k}{\partial \gamma}\right) d\alpha d\beta d\gamma$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$\det\left(\frac{\partial z_k}{\partial \alpha}, \frac{\partial z_k}{\partial \beta}, \frac{\partial z_k}{\partial \gamma}\right) = J(\alpha, \beta, \gamma),$$

gdzie $J(\alpha, \beta, \gamma)$ jest jakobianem przejścia od zmiennych z_k do zmiennych parametrycznych α, β, γ to otrzymujemy, że

$$dV = J(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \quad (8.49)$$

i całkowitą objętość bryły wyznaczymy z całki potrójnej riemanowskiej

$$\int_V dV = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} J(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma.$$

Całką objętościową z pola tensorowego $\mathbf{T}(P)$ rzędu q po objętości V nazywamy całkę postaci

$$\int_V \mathbf{T} dV,$$

która, po wyborze układu współrzędnych, jest równoważna układowi 3^q całek riemanowskich potrójnych

$$\int_V T_{ijkl\dots mn}(z_p) dV = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} T_{ijkl\dots mn}(z_p(\alpha, \beta, \gamma)) J d\alpha d\beta d\gamma. \quad (8.50)$$

Operacje całkowe na polach tensorowych można zatem sprowadzić do całek pojedynczych, podwójnych i potrójnych przy założeniu ciągłości funkcji podcałkowych.

8.5. Twierdzenia całkowe

W mechanice ośrodków ciągłych często korzysta się następujących twierdzeń całkowych:

TWIERDZENIE 8.1

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego dotyczy przejścia od całki objętościowej do całki powierzchniowej po powierzchni zamkniętej ograniczającej daną objętość.

W tradycyjnej postaci twierdzenie to ma postać

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (8.51)$$

$$\left(\int_V v_{i,i} dV = \oint_S v_i n_i dS \right)$$

gdzie \mathbf{n} jest wektorem normalnej zewnętrznej do powierzchni S . Całkę tej postaci nazywamy **strumieniem wektora** przez powierzchnię S .

Twierdzenie to można uogólnić i rozpatrzeć całkę z gradientu pola wektorowego

$$\int_V \text{grad} \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} dS$$

$$\int_V v_{i \rightarrow j} dV = \oint_S v_i n_j dS.$$

W mechanice ośrodków ciągłych interesują nas całki z dowolnych pól tensorowych. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego można zastosować do całek objętościowych z pola tensorowego. Niech $\mathbf{T}(P)$ będzie polem tensorowym o walencji q . Twierdzenie Gaussa – Ostrogradskiego ma wówczas postać

$$\int_V \text{grad} \mathbf{T} dV = \oint_S \mathbf{T} \otimes \mathbf{n} dS = \oint_S \mathbf{T} \otimes d\mathbf{S}. \quad (8.52)$$

W wybranym układzie kartezyjskim jest to układ 3^{q+1} całek (8.47)

$$\int_V T_{ijkl \dots mp \rightarrow r} dV = \oint_S T_{ijkl \dots mp} n_r dS = \oint_S T_{ijkl \dots mp} dS_r.$$

Jako przypadki szczególne rozpatrujemy całki:

$$\int_V \text{grad} \varphi dV = \oint_S \varphi \mathbf{n} dS, \quad \left(\int_V \varphi_{\rightarrow i} dV = \oint_S \varphi n_i dS = \oint_S \varphi dS_i \right)$$

$$\int_V \text{rot} \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{v} dS, \quad \left(\int_V \varepsilon_{ijk} v_{k \rightarrow j} dV = \oint_S \varepsilon_{ijk} n_j v_k dS \right).$$

Dla przypadku płaskiego wzór Gaussa-Ostrogradskiego przyjmuje postać **wzoru Greena**, który dotyczy przejścia od całki powierzchniowej po powierzchni płaskiej do całki krzywoliniowej po krzywej płaskiej zamkniętej ograniczającej daną powierzchnię.

TWIERDZENIE 8.2

Twierdzenie Stokesa daje możliwość przejścia od całki krzywoliniowej po krzywej przestrzennej zamkniętej do całki powierzchniowej po powierzchni rozpiętej na tej krzywej. Dla całki z pola prędkości wzór ten ma postać

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} = \int_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{v} dS, \quad \left(\oint_L v_i dz_i = \int_S n_i \cdot (\text{rot} \mathbf{v})_i dS = \int_S n_i \varepsilon_{ijk} v_{k,j} dS \right). \quad (8.53)$$

Całkę tej postaci nazywamy **cyrkulacją pola wektorowego** \mathbf{v} po krzywej L .

TOŻSAMOŚCI GREENA

Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego można pokazać, że spełnione są dwie tożsamości – zwane pierwszą i drugą tożsamością Greena.

PIERWSZA TOŻSAMOŚĆ GREENA ma postać

$$\int_V \varphi \Delta \psi dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS - \int_V \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi dV \quad (8.54)$$

lub w zapisie indeksowym

$$\int_V \varphi \psi_{,ii} dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS - \int_V \varphi_{,i} \psi_{,i} dV.$$

Lewą stronę tej tożsamości można przekształcić do postaci

$$\int_V \varphi \psi_{,ii} dV = \int_V [(\varphi \psi_{,i})_{,i} - \varphi_{,i} \psi_{,i}] dV = \int_V (\varphi \psi_{,i})_{,i} dV - \int_V \varphi_{,i} \psi_{,i} dV.$$

Z twierdzenia Gaussa – Ostrogradskiego (8.52) wynika, że

$$\int_V (\varphi \psi_{,i})_{,i} dV = \oint_S \varphi \psi_{,i} n_i dS = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS, \quad (8.55)$$

gdzie wielkość $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ określa prędkość zmiany pola skalarnego ψ

w kierunku normalnej zewnętrznej \mathbf{n} do powierzchni S .

Po podstawieniu równości (8.55) w miejsce całki po objętości w przekształconej lewej stronie tożsamości (8.54) otrzymujemy prawą stronę pierwszej tożsamości Greena.

DRUGA TOŻSAMOŚĆ GREENA jest konsekwencją pierwszej tożsamości Greena i ma postać

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (8.56)$$

Zamieniając w pierwszej tożsamości Greena (8.54) φ na ψ otrzymujemy

$$\int_V \psi \Delta \varphi dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \int_V \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi dV.$$

Po odjęciu stronami od pierwszej tożsamości Greena (8.54) ostatniej równości otrzymujemy drugą tożsamość Greena.

Twierdzenia całkowe mają zastosowanie w mechanice ośrodków ciągłych przy wyprowadzaniu lokalnych zasad zachowania.

Rozdział 9. Czasoprzestrzeń fizyki klasycznej

Definicja

Czasoprzestrzeń fizyki klasycznej nazywamy zbiór \mathcal{N} , którego elementami są zdarzenia (P, t) , pary uporządkowane (punkt, chwila).

Zbiór \mathcal{N} otrzymujemy z iloczynu kartezjańskiego

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T} \tag{9.1}$$

$$P \in \mathcal{E}_3, \quad t \in \mathcal{T} \Rightarrow (P, t) \in \mathcal{N}.$$

Przestrzeń euklidesowa punktowa \mathcal{E}_3 jest modelem matematycznym przestrzeni fizycznej. Przestrzeń \mathcal{E}_3 nie jest przestrzenią liniową. Można wprowadzić stowarzyszoną z \mathcal{E}_3 przestrzeń euklidesową wektorową \mathfrak{E}_3 , która to jest przestrzenią liniową z iloczynem skalarnym (2.11). Należy teraz zająć się osią czasu \mathcal{T} .

9.1. Miary czasu

Czas, zgodnie z definicją podaną przez Newtona, biegnie w jednym kierunku, stale i jednostajnie. Matematycznie pojęcie czasu można wprowadzić odwzorowując oś czasu – zbiór \mathcal{T} na oś liczb rzeczywistych \mathcal{R} [30].

Definicja

Miarą czasu nazywamy odwzorowanie

$$\tau : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}, \tag{9.2}$$

$$t_1, t_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \tau(t_1, t_2) \in \mathcal{R},$$

które spełnia następujące aksjomaty:

$$\text{a) } \bigwedge_{t_1, t_2 \in \mathcal{T}} \tau(t_1, t_2) = -\tau(t_2, t_1),$$

$$\text{b) } \bigwedge_{t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T}} \tau(t_1, t_3) = \tau(t_1, t_2) + \tau(t_2, t_3), \quad (9.3)$$

$$\text{c) } \bigwedge_{t \in \mathcal{T}} \bigwedge_{\alpha \in \mathcal{R}} \tau(0, t) = \alpha \in \mathcal{R}.$$

Wartość $\tau(t_1, t_2)$ (9.2) nazywamy **odstępem czasowym** chwil t_1 i t_2 w mierze τ .

Zbiór \mathcal{T} , po wprowadzeniu miary τ , jest zbiorem uporządkowanym. Chwilę t_1 nazywamy wcześniejszą od chwili t_2 ($t_1 < t_2$), jeżeli $\tau(t_1, t_2) > 0$.

Miara czasu τ jest określona jednoznacznie, gdy zadana jest jej wartość dla dwóch dowolnych chwil t_1, t_2 . Wielkość $\tau(t_1, t_2)$ nazywamy wówczas **wzorcem czasowym**.

Dla zadanego τ , ustalając w zbiorze \mathcal{T} chwilę początkową $t_0 = 0$, mamy jednoznacznie określone odwzorowanie osi czasu \mathcal{T} na oś liczb rzeczywistych \mathcal{R} .

Jeżeli odwzorowanie

$$\tau_0 : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{R}$$

jest określone jako odwzorowanie

$$\tau_0(t) \equiv \tau(0, t) = \alpha \in \mathcal{R}, \quad (9.4)$$

wówczas każdej chwili $t \in \mathcal{T}$ przyporządkowana jest liczba $\alpha \in \mathcal{R}$ i oś czasu modelujemy osią liczb rzeczywistych. Takie przyporządkowanie jest możliwe gdy została wybrana miara czasu τ i wybrano chwilę początkową t_0 .

Dwie dowolne miary czasu τ_1 i τ_2 związane są zależnością

$$\tau_2 = \beta \tau_1, \quad \beta \in \mathcal{R}.$$

Jeżeli $\beta > 0$ to miary czasu τ_1 i τ_2 mają jednakowy zwrot. Gdy $\beta < 0$ to miary czasu τ_1 i τ_2 mają zwrot przeciwny.

W mechanice ośrodków ciągłych postuluje się, że dowolny proces dynamiczny odbywa się w pewnej chwili czasowej oraz w pewnym miejscu przestrzeni fizycznej. Przestrzeń fizyczną modelujemy przestrzenią euklidesową punktową \mathcal{E}_3 , zaś oś czasu \mathcal{T} osią liczb rzeczywistych. W ten sposób konstruujemy czasoprzestrzeń fizyki klasycznej $\mathcal{N} = \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T}$. Jest to przestrzeń czterowymiarowa do której przestrzeń euklidesowa \mathcal{E}_3 i oś czasu wchodzi na różnych warunkach.

Na zbiorze \mathcal{N} można określić dwa następujące działania:

- a) Dla dwóch dowolnych zdarzeń definiujemy ich odstęp czasowy.
- b) Dla dwóch zdarzeń równoczesnych (zdarzeń o odstępem czasowym równym zero) definiujemy odległość tych zdarzeń.

9.2. Odległości zdarzeń

Dwa dowolne zdarzenia na ogół różnią się miejscem zajmowanym w przestrzeni fizycznej jak również chwilą w której dane zdarzenia zachodzą. Przestrzeń fizyczna i oś czasu wchodzi do definicji czasoprzestrzeni (9.1) w istotnie różny sposób. Na dowolnych zdarzeniach można zdefiniować odwzorowanie zwane ich odstępem czasowym, zaś odległość zdarzeń jest zdefiniowana jedynie dla zdarzeń równoczesnych.

ODSTĘP CZASOWY DWÓCH DOWOLNYCH ZDARZEŃ

Każdej dowolnej parze zdarzeń $(P, t_1) \in \mathcal{N}$ i $(Q, t_2) \in \mathcal{N}$ przyporządkujemy liczbę

$$\varphi : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{R}, \tag{9.5}$$

$$\varphi[(P, t_1), (Q, t_2)] \equiv \tau(t_1, t_2) \in \mathcal{R},$$

którą nazywamy ich *odstępem czasowym*.

Dwa zdarzenia $(P, t_1) \in \mathcal{N}$ i $(Q, t_2) \in \mathcal{N}$ nazywamy **równoczesnymi**, jeżeli $t_1 = t_2$, tzn., że odstęp czasowy tych zdarzeń $\tau(t_1, t_2) = \tau(t_1, t_1) = 0$. Należą one wówczas do podzbioru $\mathcal{N}_{t_1} = \mathcal{E}_3 \times \{t_1\}$, który jest przekrojem czasowym zbioru \mathcal{N} . Są to zdarzenia, które zachodzą w tej samej chwili - w chwili t_1 .

ODLEGŁOŚĆ ZDARZEŃ RÓWNO CZESNYCH

Każdej dowolnej parze zdarzeń równoczesnych $(P, t_1) \in \mathcal{N}_{t_1}$ i $(Q, t_1) \in \mathcal{N}_{t_1}$ przyporządkowujemy wektor, którego długość nazywamy odległością tych zdarzeń

$$\psi[(P, t_1), (Q, t_1)] = \left| \vec{PQ} \right| \in \mathcal{R}. \quad (9.6)$$

Z podanych odwzorowań (9.5) i (9.6) wynika, że do zbioru \mathcal{N} przestrzeń euklidesowa i oś czasu wchodzi na różnych warunkach. Odstęp czasowy został zdefiniowany dla dwóch dowolnych zdarzeń, zaś odległość zdarzeń została zdefiniowana jedynie dla zdarzeń równoczesnych. Bardzo istotną cechą zbioru \mathcal{N} jest możliwość utożsamiania punktów w różnych przekrojach czasowych. Dwa zdarzenia mogą zachodzić w tym samym miejscu w przestrzeni euklidesowej, ale w różnych chwilach czasowych.

Jeżeli

$$(P, t_1) \in \mathcal{N}_{t_1}, (Q, t_2) \in \mathcal{N}_{t_2},$$

to równość $P = Q$ oznacza, że w tych zdarzeniach punkty te są w tym samym miejscu w przestrzeni euklidesowej, ale w różnych chwilach czasowych.

9.3. Automorfizmy czasoprzestrzeni

Można rozpatrywać odwzorowania czasoprzestrzeni \mathcal{N} w siebie

$$W : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}, \quad (9.7)$$

$$W : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T}.$$

Każde odwzorowanie iloczynu kartezjańskiego $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{T}$ w siebie składa się z dwóch odwzorowań:

$$U : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}_3, \quad (9.8)$$

$$V : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}.$$

A zatem odwzorowanie (9.7)

$$W : \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E}_3 \times \mathcal{T}.$$

ma postać

$$W(P, t) = \{U(P, t), V(P, t)\}. \quad (9.9)$$

W mechanice ośrodków ciągłych interesują nas automorfizmy czasoprzestrzeni \mathcal{N} . Są to odwzorowania (9.9) liniowe, odwracalne czasoprzestrzeni \mathcal{N} na siebie zachowujące strukturę czasoprzestrzeni. Zachowują one zatem odstępy czasowe dowolnych zdarzeń (9.5) i odległości zdarzeń równoczesnych (9.6).

Muszą być wówczas spełnione następujące warunki:

$$\varphi[W(P, t_1), W(Q, t_2)] = \varphi[(P, t_1), (Q, t_2)] = \tau(t_1, t_2). \quad (9.10)$$

$$\psi[W(P, t_1), W(Q, t_1)] = L_{t_1} \psi[(P, t_1), (Q, t_1)] = \left| \vec{PQ} \right|,$$

gdzie przez L_{t_1} oznaczono automorfizm w \mathfrak{E}_3 . Przy takim odwzorowaniu zdarzenia równoczesne przechodzą w równoczesne i zachowana jest odległość zdarzeń równoczesnych.

Z równości (9.9)

$$W(P, t) = \{U(P, t), V(P, t)\}$$

wynika, że dla ustalonej chwili t odwzorowaniu $U(P, t)$ (9.8) można przyporządkować odwzorowanie

$$U_t : \mathcal{E}_3 \times \{t\} \rightarrow \mathcal{E}_3. \quad (9.11)$$

Jest to jednoparametrowa rodzina odwzorowań zależna od parametru t .

Analogicznie, dla ustalonego punktu P odwzorowaniu $V(P, t)$ można przyporządkować odwzorowanie

$$V_P : \{\mathbf{P}\} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}. \quad (9.12)$$

Jest to również jednoparametrowa rodzina odwzorowań zależna od parametru P .

Odwzorowanie (9.9) można wówczas przedstawić w postaci

$$W(P, t) = \{U_t(P), V_P(t)\}. \quad (9.13)$$

Z zachowania odstępów czasowych wynika, że

$$\tau(V_P(t_1), V_Q(t_2)) = \tau(t_1, t_2).$$

Odwzorowanie V_P nie zależy zatem od punktu P .

Automorfizmami osi czasu \mathcal{T} są więc przekształcenia postaci

$$V_P(t) = t^* = t + a, \quad (9.14)$$

gdzie $a \in \mathcal{R}$. Liczba a charakteryzuje automorfizm.

Z zachowania odległości zdarzeń równoczesnych wynika, że

$$U_t(P), U_t(Q) = \mathbf{Q}_t(\vec{PQ}), \quad (9.15)$$

gdzie tensor \mathbf{Q}_t jest tensorem ortogonalnym drugiego rzędu (4.2).

9.4. Obserwator przestrzeni i układ odniesienia

Aby podać postać automorfizmu czasoprzestrzeni \mathcal{N} na siebie należy podać definicję układu odniesienia oraz obserwatora, [30].

Mamy wprowadzić obiekt, który obserwuje przestrzeń euklidesową punktową i związaną z nią algebrę tensorową. Minimalne ciało, które może być obserwatorem składa się z czterech cząstek: $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$.

Definicja

Obserwatorem O przestrzeni \mathcal{E}_3 nazywamy zbiór o czterech uporządkowanych elementach $\{\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3\} = \{\chi_0; \chi_i\}$ - (najprostszy sympleks w \mathcal{E}_3 ma cztery wierzchołki).

Klasę odwzorowań

$$\kappa : \{\chi_0; \chi_i\} \rightarrow \mathcal{E}_3.$$

nazywamy **konfiguracją** κ obserwatora O w \mathcal{E}_3 . Jest to odwzorowanie cząstek na punkty w przestrzeni euklidesowej \mathcal{E}_3

$$P_0 = \kappa(\chi_0), \quad P_i = \kappa(\chi_i). \quad (9.16)$$

Punkt $P_0 = \kappa(\chi_0)$ nazywamy **umiejscowieniem obserwatora w konfiguracji** κ .

Konfigurację κ nazywamy nieosobliwą, gdy wektory

$$\kappa(\chi_0)\kappa(\chi_i) = \vec{P}_0P_i \in \mathfrak{D}_3 \quad (9.17)$$

są liniowo niezależne.

Definicja

Układem odniesienia w \mathcal{E}_3 nazywamy każdą uporządkowaną czwórkę punktów

$$\{O; X_i\} \quad i=1,2,3 \quad (9.18)$$

taką, że wektory $\vec{OX}_i = \mathbf{x}_i$ są liniowo niezależne. Punkt O nazywamy początkiem układu odniesienia.

A zatem każda nieosobliwa konfiguracja obserwatora jest układem odniesienia.

Układ odniesienia jest ortogonalny, gdy

$$\vec{OX}_i \cdot \vec{OX}_j = 0 \quad \text{dla } i \neq j.$$

Z pojęciem układu odniesienia jest ściśle związane pojęcie repera w \mathcal{E}_3 .

Reperem w \mathcal{E}_3 nazywamy parę $\{P_0; \mathbf{p}_i\}$ złożoną z punktu P_0 zaczepienia repera i bazy $\mathbf{p}_i \in \mathfrak{D}_3$ - trójki wektorów liniowo niezależnych.

Reper $\{P_0; \mathbf{p}_i\}$, gdzie $\mathbf{p}_i = \vec{P_0 P_i}$ nazywamy reperem układu odniesienia $\{P_0; P_i\}$, (9.16).

Biorąc układ odniesienia $\{P_0; P_i\}$ i jego reper $\{P_0; \mathbf{p}_i\}$ możemy dowolny punkt $X \in \mathcal{E}_3$ przedstawić w postaci

$$\vec{P_0 X} = \mathbf{x} = x^i \mathbf{p}_i \quad (9.19)$$

lub w postaci symbolicznej

$$X = P_0 + \mathbf{x} = P_0 + x^i \mathbf{p}_i. \quad (9.20)$$

Ostatnia równość nie oznacza dodawania punktów i wektorów. Oznacza ona jedynie, że punkt X jest końcem wektora \mathbf{x} o początku w punkcie P_0 .

Liczby x^i nazywamy współrzędnymi punktu X w układzie odniesienia $\{P_0; P_i\}$.

Dwa układy odniesienia $\{P_0; P_i\}$ i $\{R_0; R_i\}$ o reperach $\{P_0; \mathbf{p}_i\}$ i $\{R_0; \mathbf{r}_i\}$, gdzie $\mathbf{p}_i = \vec{P_0 P_i}$ i $\mathbf{r}_i = \vec{R_0 R_i}$ mogą być dwiema różnymi konfiguracjami tego samego obserwatora lub konfiguracjami dwóch różnych obserwatorów.

Ruch obserwatora składa się zatem z przeniesienia go z punktu P_0 do punktu R_0 oraz z liniowego odwzorowania wektorów \mathbf{p}_i w wektory \mathbf{r}_i przy pomocy afinora \mathbf{A} . Tym samym zmiana układu odniesienia określona jest przez tensor \mathbf{A} i wektor $\mathbf{c} = \vec{P_0 R_0}$.

Wracając do automorfizmów w \mathcal{N} zauważmy, że odwzorowanie (9.11)

$$U_t : \mathcal{E}_3 \times \{t\} \rightarrow \mathcal{E}_3$$

ma zachowywać odległości zdarzeń równoczesnych (9.15)

$$U_t(P), \vec{U}_t(Q) = \mathbf{Q}_t(\vec{PQ}).$$

Jeżeli przyjmiemy, że punkt $P = O$ jest początkiem układu odniesienia, zaś punkt X jest dowolnym punktem należącym do \mathcal{E}_3 , to z (9.15) wynika, że

$$U_t(O), \vec{U}_t(X) = \mathbf{Q}_t(\vec{OX}). \quad (9.21)$$

Odwzorowanie U_t (9.11) można przedstawić w postaci:

$$U_t(O) = O + \mathbf{c}, \quad (9.22)$$

$$U_t(X) = U_t(O + \mathbf{x}) = U_t(O) + \mathbf{Q}_t(\vec{OX}) = O + \mathbf{c} + \mathbf{Q}_t \mathbf{x},$$

gdzie

$$X = O + \mathbf{x}$$

co oznacza, że $\vec{OX} = \mathbf{x}$.

Jeżeli przyjmiemy następujące oznaczenie

$$U_t(O + \mathbf{x}) \equiv O + \mathbf{x}^*$$

to równość (9.22) można zapisać jako zależność

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}_t \mathbf{x} + \mathbf{c}. \quad (9.23)$$

Automorfizm $\mathcal{N} \xrightarrow{na} \mathcal{N}$ (9.7) można traktować jako zmianę obserwatora. Jeden obserwator widzi dane zdarzenie fizyczne w chwili t w punkcie X - zdarzenie (X, t) . To samo zdarzenie inny obserwator widzi w chwili t^* w punkcie X^* - zdarzenie (X^*, t^*) .

Zmiana obserwatora jest związana ze zmianą punktu w przestrzeni euklidesowej punktowej \mathcal{E}_3 (wektora w \mathfrak{E}_3) i z przesunięciem na osi czasu. Jedno-jednoznaczna zależność między punktami w \mathcal{E}_3 a wektorami w \mathfrak{E}_3 jest ustalona poprzez przyjęcie układu odniesienia. Ostatecznie automorfizm czasoprzestrzeni \mathcal{N} można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}(t), \\ t^* &= t + a.\end{aligned}\tag{9.24}$$

Jest to najbardziej ogólna jedno-jednoznaczna transformacja czasoprzestrzeni \mathcal{N} na siebie (9.7), która zachowuje :

- kolejność zdarzeń,
- odległość zdarzeń równoczesnych (odległość między dowolną parą punktów w \mathcal{E}_3),
- odstępy czasowe dowolnych zdarzeń.

Należy odróżnić zmianę obserwatora od zmiany układu współrzędnych, przy której zmieniają się jedynie współrzędne punktu. Sam punkt pozostaje bez zmian.

Automorfizmy czasoprzestrzeni \mathcal{N} na siebie są wykorzystywane w mechanice przy definiowaniu wielkości obiektywnych.

Dodatek

W mechanice ośrodków ciągłych przestrzeń fizyczną rozpatrujemy jako przestrzeń euklidesową punktową $P \in \mathcal{E}_3$, którą można zawsze odwzorować w przestrzeń euklidesową wektorową \mathfrak{E}_3 (po wyborze punktu $O \in \mathcal{E}_3$ będącego początkiem promień wektora \vec{OP}), zaś przestrzeń wektorową \mathfrak{E}_3 można odwzorować w przestrzeń liczbową $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ (po wyborze bazy \mathbf{e}_i w \mathfrak{E}_3). Przestrzeń \mathcal{R}^3 jest zbiorem wszystkich uporządkowanych układów (x^1, x^2, x^3) składających się z 3 liczb rzeczywistych $x^1, x^2, x^3 \in \mathcal{R}$, $\vec{OP} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^i \mathbf{e}_i$. Ostatnia równość wynika z konwencji sumacyjnej Einsteina. Wektor jest zatem obiektem geometrycznym jedno indeksowym w ustalonej bazie \mathbf{e}_i , $\vec{OP} = \mathbf{x} \Rightarrow x^i$. W przestrzeni euklidesowej zawsze można wprowadzić bazę ortonormalną i wówczas możemy pisać wszystkie indeksy na jednym poziomie $\vec{OP} = x_i \mathbf{e}_i$. W dalszym ciągu obowiązuje konwencja sumacyjna.

Baza \mathbf{e}_i jest ortonormalna, gdy

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij},$$

gdzie δ_{ij} jest *delta Kroneckera* zdefiniowaną następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Jest to wielkość dwu indeksowa, tak jak macierz kwadratowa o wymiarze 3×3 . W zapisie macierzowym ma ona postać macierzy diagonalnej

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Poza deltą Kronekera, ważną rolę w mechanice ośrodków ciągłych odgrywa wielkość trój indeksowa ε_{ijk} , zwana **symbolem permutacyjnym albo alternatorem Levi-Civita**. Wielkość ta zdefiniowana jest następująco:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases} . \quad (D.3)$$

Symbol ε_{ijk} przyjmuje wartość 0 jeżeli $i = j$ lub $j = k$ lub $k = i$. Przyjmuje on wartość +1 jeżeli ijk otrzymuje się z 123 w wyniku parzystej liczbie przestawień (permutacji). Symbol ε_{ijk} przyjmuje wartość -1 wówczas, gdy ijk otrzymuje się z 123 w wyniku nieparzystej liczbie przestawień.

Symbol permutacyjny (D.3) jest wielkością absolutnie antysymetryczną, ponieważ

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}. \quad (D.4)$$

Dla symbolu permutacyjnego ε_{ijk} (D.3) spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} &= 6, \\ \varepsilon_{mjk} \varepsilon_{njk} &= 2\delta_{mn}, \\ \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \end{aligned} \quad (D.5)$$

Korzystając z własności symbolu ε_{ijk} (D.4), wyznacznik dowolnej macierzy kwadratowej (A_{mn}) o wymiarze 3×3 można przedstawić w postaci:

$$\det(A_{mn}) = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}$$

lub

$$\varepsilon_{ijk} \det(A_{mn}) = \varepsilon_{rst} A_{ir} A_{js} A_{kt}. \quad (\text{D.6})$$

Symbol permutacyjny ε_{ijk} można również wykorzystać do zapisu objętości czworościanu rozpiętego na trzech wektorach liniowo niezależnych $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ przez ich składowe w bazie ortonormalnej. Mamy wówczas, że

$$V = \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k. \quad (\text{D.7})$$

Jeżeli rozpatrujemy iloczyn wektorowy dwóch wektorów \mathbf{u} i \mathbf{v}

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad (\text{D.8})$$

to łatwo udowodnić, że dla składowych tych wektorów w tej samej bazie ortonormalnej spełniona jest równość

$$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k. \quad (\text{D.9})$$

Z definicji symbolu ε_{ijk} (D.3) wynika, że $w_i \cdot u_i = w_i v_i = 0$. A zatem wektor \mathbf{w} jest prostopadły do obu wektorów \mathbf{u} i \mathbf{v} . Z drugiej strony, z (D.9) wynika, że

$$w_i w_i = \varepsilon_{ijk} w_i u_j v_k. \quad (\text{D.10})$$

Lewa strona tej równości jest równa kwadratowi długości wektora \mathbf{w} , ponieważ $|\mathbf{w}|^2 = w_i w_i$. Strona prawa, zgodnie ze wzorem (D.7), jest równa objętości czworościanu rozpiętego na tych wektorach. Jest to iloczyn pola podstawy i wysokości. Oznacza to, że iloczyn wektorowy jest wektorem, którego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach \mathbf{u} i \mathbf{v} .

Tensory euklidesowe są elementami przestrzeni utworzonych z przestrzeni euklidesowych wektorowych \mathfrak{E}_3 . Przestrzeń tensorów rzędu p (o walencji p) \mathcal{T}_p jest otrzymana z przestrzeni \mathfrak{E}_3 w wyniku p -krotnego iloczynu tensorowego \mathfrak{E}_3 . A zatem mamy, że

$$\mathcal{T}_p = \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3 \otimes \dots \otimes \mathfrak{D}_3.$$

Tensory drugiego rzędu są więc elementami przestrzeni $\mathcal{T}_2 = \mathfrak{D}_3 \otimes \mathfrak{D}_3$. Jeżeli tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$, to w ustalonej bazie ortonormalnej \mathbf{e}_i można napisać, że

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{D.11})$$

Tensor drugiego rzędu $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$ w ustalonej bazie można zatem traktować jak wielkość dwu indeksową A_{ij} . Podobnie można rozpatrywać tensory o dowolnej walencji.

O rzędzie tensora będzie nas informowała liczba wolnych indeksów. Wielkość L_{ijkl} jest reprezentacją tensora czwartego rzędu, natomiast wielkość $L_{ijkk} = L_{ij11} + L_{ij22} + L_{ij33}$ jest reprezentacją tensora drugiego rzędu. W zapisie indeksowym w ustalonym układzie kartezjańskim możemy napisać.

Dla wektorów

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\Leftrightarrow x_i, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{R} &\Leftrightarrow u_i v_i, \\ \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in \mathcal{T}_2 &\Leftrightarrow u_i v_j. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Dla tensorów

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\Leftrightarrow \delta_{ij}, \\ \mathbf{A} &\Leftrightarrow A_{ij}, \\ \mathbf{L} &\Leftrightarrow L_{ijkl}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Dla tensorów drugiego rzędu można rozpatrywać następujące operacje:

$$\begin{aligned} \text{tr} \mathbf{1} &= \delta_{ii} = 3, \\ \text{tr} \mathbf{A} &= A_{ii} \in \mathcal{R}, \\ \det \mathbf{A} &= \det(A_{ij}) \in \mathcal{R}, \\ \mathbf{A}^T \in \mathcal{T}_2 &\Leftrightarrow (\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2 & \Leftrightarrow A_{ip}A_{pj}, \\
\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2 & \Leftrightarrow (\mathbf{A})_{ip}A_{pj} = A_{im}A_{mn}\dots A_{sp}A_{pj}, \\
\mathbf{1}\mathbf{x} = \mathbf{x} & \Leftrightarrow \delta_{ij}x_j = x_i, \\
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{T}_1 = \mathfrak{D}_3 & \Leftrightarrow A_{ij}x_j, \\
\mathbf{y} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} = & \Leftrightarrow y_i A_{ij} x_j \\
\mathbf{A} \cdot (\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) \in \mathcal{R} & \\
\mathbf{A} \otimes \mathbf{x} \in \mathcal{T}_3 & \Leftrightarrow A_{ij}x_k, \\
\mathbf{A}\mathbf{B} \in \mathcal{T}_2 & \Leftrightarrow A_{ip}B_{pj}, \\
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{R} & \Leftrightarrow A_{ij}B_{ij}, \\
\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathcal{T}_4 & \Leftrightarrow A_{ij}B_{kl}.
\end{aligned} \tag{D.14}$$

Jeżeli tensor drugiego rzędu spełnia warunek

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad Q_{mi}Q_{mj} = Q_{im}Q_{jm} = \delta_{ij},$$

to taki tensor nazywamy *tensorem ortogonalnym*. Zachodzi wówczas równość

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}.$$

Dla tensorów drugiego rzędu i tensorów czwartego rzędu można dokonać następujących operacji:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} \in \mathcal{T}_2 & \Leftrightarrow L_{ijkl}A_{kl}, \\
\mathbf{I} \in \mathcal{T}_4 & \Leftrightarrow (\mathbf{I})_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \\
\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} & \Leftrightarrow \delta_{ik}\delta_{jl}A_{kl} = A_{ij} \\
\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \in \mathcal{T}_2 & \Leftrightarrow L_{ijkl}A_{ij}, \\
Tr\mathbf{L} \in \mathcal{R} & \Leftrightarrow L_{ijij}, \\
\mathbf{1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{1} \in \mathcal{R} & \Leftrightarrow L_{ijij}, \\
\mathbf{L}^T & \Leftrightarrow (\mathbf{L}^T)_{ijkl} = L_{klij}.
\end{aligned} \tag{D.15}$$

Gdy

$$\mathbf{L}, \mathbf{H} \in \mathcal{T}_4,$$

to

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{H} \in \mathcal{R} & \Leftrightarrow L_{ijkl} H_{ijkl}, \\ \mathbf{L} \circ \mathbf{H} \in \mathcal{T}_4 & \Leftrightarrow L_{ijmn} H_{mnkl}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Symbol permutacyjny ε_{ijk} (D.3) mimo, że jest wielkością trójindeksową, nie jest reprezentacją tensora trzeciego rzędu.

Zgodnie z transformacyjną definicją tensora, tensor \mathbf{T} rzędu p o składowych $T_{ij\dots mn}$ w układzie $\{x_m\}$, w innym układzie kartezjańskim $\{\tilde{x}_l\}$ związanym z $\{x_m\}$ zależnościami

$$\tilde{x}_l = \alpha_{lm} x_m \quad (\text{D.17})$$

ma składowe $\tilde{T}_{rs\dots tu}$, przy czym

$$\tilde{T}_{rs\dots tu} = \alpha_{rt} \alpha_{sj} \dots \alpha_{lm} \alpha_{un} T_{ij\dots mn}, \quad (\text{D.18})$$

gdzie macierz α_{lm} jest macierzą ortogonalną.

Można pokazać, że symbol permutacyjny ε_{ijk} podlega regułom transformacji tensora (D.18) tylko dla transformacji reprezentujących obroty układu, gdy $\det(\alpha_{lm}) = +1$. Nie podlega tym regułom dla odbić, gdy $\det(\alpha_{lm}) = -1$. Fakt ten wynika z definicji wyznacznika macierzy (D.6). Gdy w (D.6) przyjmiemy, że $A_{ij} = \alpha_{ij}$, to otrzymujemy wzór na transformację symbolu permutacyjnego

$$\varepsilon_{ijk} \det(\alpha_{mn}) = \varepsilon_{rst} \alpha_{ir} \alpha_{js} \alpha_{kt}. \quad (\text{D.19})$$

Obiekty geometryczne o tych własnościach nazywa się **pseudotensorami**. I tak na przykład pseudoskalarem będzie wielkość (D.7), pseudowektorem będzie iloczyn wektorowy dwóch wektorów (D.8). Pseudowektor $u_i = \varepsilon_{ijk} A_{jk}$ nazywamy wektorem dwoistym do tensora A_{jk} i zależy on tylko od części antysymetrycznych tensora \mathbf{A} . Mamy mianowicie, że

$$u_1 = A_{23} - A_{32}, \quad u_2 = A_{31} - A_{13}, \quad u_3 = A_{12} - A_{21}.$$

Wektor dwoisty do tensora symetrycznego jest wektorem zerowym. Własność tę można uogólnić.

Niech $\mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{W} \in \mathcal{T}_2$ są trzema tensorami drugiego rzędu, wówczas

- a) jeżeli $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = T_{ij} S_{ij} = 0$ dla każdego \mathbf{S} , to tensor $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ (jest tensorem zerowym),
- b) jeżeli $\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = T_{ij} S_{ij} = 0$ dla każdego \mathbf{S} symetrycznego ($\mathbf{S}^T = \mathbf{S}$), to tensor \mathbf{T} jest tensorem antysymetrycznym ($\mathbf{T}^T = -\mathbf{T}$),
- c) jeżeli $\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = T_{ij} W_{ij} = 0$ dla każdego \mathbf{W} antysymetrycznego ($\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$), to tensor \mathbf{T} jest symetryczny ($\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$).

Każdy tensor $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_2$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci sumy jego części symetrycznej i antysymetrycznej

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(s)} + \mathbf{T}^{(a)},$$

gdzie

$$\mathbf{T}^{(s)} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), \quad \mathbf{T}^{(a)} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T). \quad (\text{D.20})$$

Wykorzystując podane powyżej fakty możemy napisać, że

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{T}^{(s)} + \mathbf{T}^{(a)}) \cdot (\mathbf{S}^{(s)} + \mathbf{S}^{(a)}) = \mathbf{T}^{(s)} \cdot \mathbf{S}^{(s)} + \mathbf{T}^{(a)} \cdot \mathbf{S}^{(a)}, \quad (\text{D.21})$$

ponieważ

$$\mathbf{T}^{(s)} \cdot \mathbf{S}^{(a)} = \mathbf{T}^{(a)} \cdot \mathbf{S}^{(s)} = 0. \quad (\text{D.22})$$

W mechanice ośrodków ciągłych z podanych własności korzysta się przy dowodzie symetrii tensora naprężenia.

W mechanice ośrodków ciągłych korzysta się również z tak zwanego **twierdzenia o dzieleniu tensorów**. Przy definiowaniu operacji na tensorach nie zdefiniowaliśmy operacji dzielenia tensora przez tensor. Została natomiast zdefiniowana operacja nasunięcia dwóch tensorów.

Jeżeli dane są dwa tensory $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_4$, $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$, to możliwe działania na tych tensorach zostały podane w (D.14) i (D.15).

I tak w wyniku ich pełnego nasunięcia $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$ otrzymujemy tensor rzędu dwa ($L_{ijkl}A_{kl}$). Wykorzystajmy tę własność.

Niech rozpatrywana przez nas fizyczna wielkość, w danym prostokątnym układzie kartezjańskim, jest opisana układem $3^4 = 81$ liczb L_{ijkl} . Zakładamy, że przy zmianie układu współrzędnych, wielkość $L_{ijkl}A_{kl}$ dla dowolnego tensora A_{kl} transformuje się jak tensor drugiego rzędu. Można wówczas pokazać, że liczby L_{ijkl} są składowymi tensora czwartego rzędu. Należy pokazać, że składowe te transformują się według wzoru (D.18). Własność ta znana jest jako twierdzenie o dzieleniu tensorów. Korzysta się z niej przy dowodzie, że $grad\varphi = \mathbf{v}$ (gradient skalarą jest wektorem), $grad\mathbf{v} = \mathbf{A}$ (gradient wektora jest tensorem drugiego rzędu).

Literatura

1. R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Application*, Springer-Verlag, New York 1988, (second Edition).
2. L. Auslander, R. E. Mac Kenzie, *Rozmaitości różniczkowalne*, PWN, Warszawa 1969.
3. E. Beltrami, *Sulla condizioni di resistenza dei corpi elastici*, Rend. I-st. Lomb. II, 18, 1885.
4. A. Blinowski, *Obroty ciał odkształcalnych, część I, Geometria i kinematyka*, 7/1994, Prace IPPT.
5. W. T. Burzyński, *Studium nad hipotezami wyężenia*, Lwów 1928, lub *Dzieła Wybrane*, t. I, PWN, Warszawa 1982.
6. S. C. Cowin and M. M. Mehrabadi, *On the identification of material symmetry for anisotropic elastic materials*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **40**, 451-476, 1987.
7. K. F. Czernych, *Vviedienije w anizotropnuju uprugost*, Izd „Nauka” Moskva 1988, (w języku rosyjskim).
8. I. M. Gelfand, *Lekcii po linejnoi algebre*, Izd. „Nauka” Moskwa 1996, wydanie trzecie (w języku rosyjskim).
9. S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, PWN, Warszawa 1966 (wydanie drugie).
10. H. Hencky, *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*, ZAMM, **4**, 323-334, 1924.

11. M. T. Huber, *Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału*, Czas. Techn. XXII, Lwów 1904.
12. N. Je, Koczin, *Wjektornoje isczislenie i naczala tenzornogo isczislenija*, Izd. „Nauka” Moskva 1965, (w języku rosyjskim) wydanie dziewiąte.
13. J. Komorowski, *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadratyk*, PWN, Warszawa 1978.
14. K. Kowalczyk-Gajewska, J. Ostrowska-Maciejewska, *The influence of internal restrictions on the elastic properties of anisotropic materials*, Arch. Mech., **56**, 3, 205-232, Warszawa 2004.
15. K. Kuratowski, *Topologia*, PWN, Warszawa 1966.
16. H. Lass, *Vector and Tensor Analysis*, McGraw-Hill Book Company, INC, 1950.
17. S.G. Lechnickij, *Tieorija uprugosti anizotropnogo ciela*, Gosudar. Izd. , Moskva, 1950, (w języku rosyjskim).
18. G. Ja. Ljubarskij, *Tieorja grup i je primjenienije w fizykje*, Gosudar. Izd. Fizyko-Mat. Literatury, Moskva 1958, (w języku rosyjskim).
19. J.C. Maxwell, *Origins of Clerk Maxwell`s electric ideas as descibed in familiar letters to William Thomson*, Cambridge at the University Press 1937, (in the letter from 1856), Proc. Cambridge Phil. Soc., **32**, 1936.
20. A.J. Mc Connell, *Application of tensor analysis*, Dover Publications, INC. New York 1957.
21. R. von Mises, *Mechanik der festen Korper im plastisch deformablen Zustand*, Nachrichten der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, Math-Phys., **1**, 4, 582-592, 1913.

22. R. von Mises, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 8, 161-185, 1928.
23. A. Mostowski, M. Stark, *Algebra Wyższa*, część II, Warszawa, 1954.
24. J. Ostrowska-Maciejewska, *Podstawy Mechaniki Ośrodków Ciągłych*, PWN, Warszawa 1982.
25. J. Ostrowska-Maciejewska, *Mechanika Ciał Odkształcalnych*, PWN, IPPT PAN, Warszawa 1994.
26. B.I. Pobiedria, *Lekcje po tenzornomu analizu*, Izd. Moskovskovo Universiteta 1974, (w języku rosyjskim).
27. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1977, wydanie szóste.
28. P. K. Raszewskij, *Rimanova geometria i tenzornyj analiz*, Izd. „Nauka” Moskva 1964, (w języku rosyjskim).
29. A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge University Press 1964.
30. J. Rychlewski, *Tensory i funkcje tensorowe*, Biuletyn nr 631, Instytut Maszyn Przepływowych PAN, Gdańsk 1969.
31. J. Rychlewski, *Matematyčeskaja struktura uprugich tieł "ceiinosstiv"*, Raport 217, Inst. Probl. Mechaniki AN SSSR, Moskwa 1983 (w języku rosyjskim).
32. J. Rychlewski, PMM, 48 (1984), 420-432, (w języku rosyjskim).
33. J. Rychlewski, *Elastic energy decomposition and limit criteria*, Advances in Mechanics, 7, 3. 1984 (w języku rosyjskim).
34. J. Rychlewski, *Symetria przyczyn i skutków*, PWN, Warszawa 1991.

35. J. Rychlewski, *Unconventional approach to linear elasticity*, Arch. Mech., **47** (2), 159-171, Warszawa 1995.
36. J. Rychlewski, *Anisotropy and proper states of materials*, IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solids mechanics, 19-24, 1995.
37. J. A. Schouten, "*Tensor analysis for physicists*", Oxford 1951.
38. L. I. Siedov, *Vviedienie w mechaniku splosznoj sredy*, Fiz-Mat, Moskwa 1970, (w języku rosyjskim).
39. Ju. I. Sirotin, M. P. Szaskolskaja, *Osnowy kristalofiziki*, Izd. „Nauka” Moskva 1975, (w języku rosyjskim).
40. I. S. Sokolnikoff, *Tensor Analysis: Theory and Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York 1951.
41. A. J. M. Spencer, *Theory of Invariants*, Continuum Physics, vol.I New York, Londyn 1971.
42. S. Sutcliffe, *Spectral Decomposition of the Elasticity Tensor*, Transactions of the ASME 762, vol. 59. December 1992.
43. J. L. Synge and A. Schild, *Rachunek Tensorowy*, PWN, Warszawa 1964.
44. W. Thomson (Lord Kelvin), *On six principal strains of an elastic solids*, Phil. Trans. R. Soc., **166**, (1856), 495-498.
45. T.C.T. Ting, *Invariants of anisotropic elastic constants*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, **40**, 431-448, 1987.

Skorowidz

afinor 43
automorfizm 24, 55, 59, 164
baza fizyczna 133
baza izometryczna 64
baza lokalna 21, 132, 144
ciało 19, 20
ciało materialne 10
delta Kronecker'a 23, 29, 171
dewiator 40, 52
diada 33
drugi indeks strukturalny 84
dystrybutory 83, 85
dywergencja pola tensorowego 139, 142, 143
efekt Kelvina 118, 120
efekt Poyntinga 119
endomorfizm 24
energetyczne stany własne 87, 98
energia sprężysta 91, 92, 93
forma liniowa 25
fundamentalna tożsamość dla operatora liniowego 47, 73, 77
funkcje tensorowe 107
- - hemitropowe 110
- - izotropowe 110
- - potencjalne 121
główny wzór strukturalny liniowej teorii sprężystości 78
gradient pola wektorowego 138
gradient pola tensorowego 137, 142
grupa abelowa 18
-symetrii funkcji 110
- - tensora 62, 63, 64, 69, 103
- - zbioru tensorów 63, 104
hipoteza ciągłości 10
iloczyn kartezjański 13
- skalarny 27, 41
- - energetyczny 93
- prosty 65

- tensorowy 27
- wektorowy 173
- inwersja 57
- izomer 44
- izomorfizm 24, 46
- konwencja sumacyjna Einsteina 21
- kwadrat logiczny 15
- miara czasu 161
- moduły Kelvina 75, 79, 83
- moduły Young'a 86
- nierówność Schwartza 28
- obserwator 166
- odległość zdarzeń równoczesnych 164
- odstęp czasowy 163, 164
- operator nabla 141, 145
- operatory liniowe 24, 42, 71
- parametr Lode'go 120
- pierwszy indeks strukturalny 82
- pochozna kowariantna 148
- pole wektorowe bezwirowe 140
 - bezźródłowe 140
 - nierozbieżne 140
 - potencjalne 140
 - solonoidalne 140
- polibaza prosta 34, 36
- potęga tensora 47
- prawa de Morgana 13
- projektor 52, 76, 89, 100
- przestrzeń euklidesowa punktowa 17, 31
 - wektorowa 17, 27
 - fizyczna 10, 17
 - inwariantna 50, 75
 - liniowa 20
 - sprzężona 21
 - własna 50, 75
- pseudotensor 176
- rotacja pola wektorowego 139, 143
- rotacja pola tensorowego 143

równanie charakterystyczne 49, 79
stan bezpieczny 88
suma prosta 13, 26
symbole Christoffela 146, 147
symbol permutacyjny 172
ślad tensora 40, 47
tensor jednostkowy 43, 46, 73
- metryczny 35, 133
- nieosobliwy 46
- obrotu 56
- odbicia 57
- odwrotny 46
- ortogonalny 55, 175
- podatności 69
- rozkładalny 33, 36
- stanu granicznego 68, 87, 97
- sztywności 68
tensorowy trójmian kwadratowy 117
tensory izotropowe 62, 76
tensory zgodne 68, 102
twierdzenie Cayley`a-Hamiltona 52, 81
- Gaussa-Ostrogradskiego 157
- Greena 158
- o postaci ogólnej automorfizmu czasoprzestrzeni 169
- o reprezentacji odwzorowania liniowego 42
- o rozkładzie biegunowym (polarnym) tensora 58
- o rozkładzie spektralnym (widmowym) tensora 49, 53, 74, 94, 99, 100
- Stokesa 158
układ odniesienia 126, 167
wektor dwoisty do tensora 139, 176
wyznacznik Vandermonda 81
wzór Sylwestra-Lagrange`a 116
Zasady Curie 111